7

Matematyka

Całkowanie równania różniczkowego o cząstkowych pochodnych:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Napisał:
Antoni Hoborski.



Przedmowa.

W „Rozprawach Akademii Umiejętności" w Krakowie ukazała się w r. 1905 praca p. Żaremby, profesora U. J. p. t. „Ogólne rozwiązanie zagadnienia Fouriera". W pracy tej udało się po raz pierwszy p. Żarembie scałkować pewne równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych we warunkach bardzo ogólnych, równanie, którego znaczenie dla fizyki matematycznej jest kapitalne. Praca ta oczywiście ma na oku przestrzeń trójwymiarową.

Mniej więcej przed rokiem zachęcony przez p. Żarembę do rozwinięcia metody całkowania analogicznego równania dla przestrzeni dwuwymiarowej, próbowałem od początku przyjąć warunki bardzo ogólne ale ze względu na pewne trudności zmuszony byłem warunki ogólności nieco zacieśnić.

Wskutek tego praca niniejsza stała się we większej swej części podobną do rozprawy wyżej wspomnianej, ale różni się tem, że, kiedy rozprawa p. Żaremby mimo swych stu stron druku, musiała być często tylko zestawieniem rezultatów, niniejsza praca takiem zestawieniem rezultatów być nie mogła ze względu na cel, któremu służy.

Pragnę na końcu wyrazić moją najszczerszą wdzięczność Panu Profesorowi Żarembie za Jego niezwykłą życzliwość, z którą zawsze jak najchętniej udzielał mi wielu cennych rad i wskazówek wśród pisania niniejszej pracy.

W Krakowie d. 17 stycznia 1908

Antoni Hoborski.

I. Wstęp.

§1. Uważajmy na płaszczyźnie współrzędnych kartezyuszowskich (x, y) krzywą C, ograniczającą pewien obszar, wewnątrz leżący D, który nie rozciąga się do nieskończoności, przyczem jest jednospójny; przez D' będziemy oznaczali obszar zewnątrz krzywej C leżący.
Nadto założymy o tej krzywej C, że:

1°) w każdym swym punkcie posiada określoną styczną;

2°) kąt ostry utworzony przez dwie normalne w dwóch punktach A i B krzywej C jest mniejszy od iloczynu odległości AB i stałej dodatniej, zależnej jedynie od krzywej C;

3°) dla krzywej C istnieje stała liczba dodatnia δ taka, iż koło zatoczone promieniem $\delta_1 \leq \delta$ z dowolnego punktu O na krzywej C odcina część C_0 o tej własności, że każda równoległa do normalnej w punkcie O do krzywej C przecina łuk C_0 w jednym tylko punkcie.

Przy tych założeniach o krzywej C zagadnienie, stanowiące treść niniejszej pracy, będzie następujące:

oznaczyć funkcyę V zmiennych x, y, będących współrzędnemi kartezyuszowskiemi punktów płaszczyzny i zmiennej t o własnościach:

1) funkcya V ma być określoną i ciągłą dla wszystkich położeń punktu x, y wewnątrz obszaru D i na jego ograniczeniu C i dla dodatnich wartości t;

2) dla wszystkich wartości dodatnich t należących do interwału $(0, T)$, gdzie T jest liczbą dodatnią, dowolną, moduł $|V|$ ma górną granicę niezależną od położenia punktu x, y wewnątrz obszaru D lub na jego ograniczeniu;

3) pochodne $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ mają istnieć i być ciągłe dla każdej dodatniej wartości t i dla każdego położenia punktu x, y wewnątrz obszaru D; nadto mają spełniać równanie:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \Delta V$$

gdzie jest

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2};$$

4) dla każdej dodatniej wartości t i w każdym punkcie P krzywej C ma być:

$$h'\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = h(V)_i + \varphi$$

gdzie jest $h'=0$ lub $h'=1$, zaś h funkcyą ciągłą współrzędnych punktu P, φ jest daną funkcyą współrzędnych punktu P i zmiennej t;

nadto pochodna $\frac{dV}{dN}$ ma być wzięta wzdłuż normalnej w punkcie P do krzywej C i skierowanej na wewnątrz obszaru D;

5°) do każdego układu dwóch liczb dodatnich ε, δ, choćby dowolnie małych, można znaleźć dodatnią liczbę η taką, iż, gdy tylko jest $0 < t < \eta$, $d \geq \delta$, przyczem d jest najkrótszą odległością punktu x, y od krzywej C, to jest także $|V(x,y,t) - F(x,y)| < \varepsilon$, gdzie $F(x,y)$ oznacza daną funkcyę, określoną wewnątrz obszaru D.

§2. W ostatnim rozdziale wykażemy, że łatwo rozwiązać powyższe zagadnienie, gdy rozwiążemy je dla szczególnego wypadku $\varphi \equiv 0$ i dla tego zajmiemy się najpierw tym szczególnym wypadkiem. Przyjąwszy $\varphi \equiv 0$ wykażemy, że i w wypadku dwóch zmiennych otrzymuje się:

$$V = \sum_1^\infty A_k U_k e^{-\xi_k t}$$

gdzie stałe $A_1, A_2, \dots$ zależą od funkcyi $F(x,y)$, zaś liczby ξ_k są rzeczywiste, spełniające nierówności $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq \dots$, związane z funkcyami $U_1, U_2, \dots$ zależnemi jedynie od zmiennych (x,y), które znów ze swej strony sprawdzają równanie:

$$\Delta U_k + \xi_k U_k = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

wewnątrz obszaru D, przyczem na krzywej C jest:

$$h' \left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i = h \left(U_k\right)_i \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

zarazem liczby ξ_k i funkcye U_k nie zależą od funkcyi $F(x,y)$. Wobec tego traktując zagadnienie t. zw. uproszczone t. j. zagadnienie, w którem jest $\varphi \equiv 0$, musimy:

a) wykazać istnienie funkcyi U_k o powyższych własnościach;

b) okazać zbieżność szeregu $\sum_1^\infty A_k U_k e^{-\xi_k t}$ dla wszystkich punktów (x,y) wewnątrz obszaru D i na krzywej C i dodatnich wartości t, i ciągłość funkcyi, jaką ten szereg przedstawia;

c) wykazać różniczkowalność tego szeregu raz co do (t), dwukrotnie co do (x,y), przyczem mają te szeregi być zbieżne wewnątrz obszaru D, nadto na krzywej C ma istnieć pochodna normalna, a to wszystko gdy t ma dowolną wartość dodatnią;

d) nadto mamy wykazać, że szereg ten spełnia wszystkie inne warunki, stanowiące zagadnienie, którem się praca niniejsza zajmuje, przy założeniu $\varphi \equiv 0$

Uwaga 1. Dla krótkości wysłowienia się zagadnienie, którem się zajmujemy, zwać będziemy zagadnieniem Fouriera.

Uwaga 2. Przez punkty „wewnątrz obszaru D" leżące rozumieć będziemy stale punkty obszaru D, a nie będące na krzywej C, przez punkty „obszaru D" lub „całego obszaru D" rozumieć będziemy także i te punkty, które stanowią ograniczenie C. —

§3. Ponieważ metoda całkowania wymaga znajomości potencyałów uogólnionych, przeto w obecnym rozdziale zajmiemy się nimi.
Uważajmy w tym celu równanie:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\xi w=0$$

gdzie liczba ξ nie zależy od zmiennych (x, y, t), a zresztą jest dowolna.
Niech jest

$$(1) \qquad \xi=\rho_1(\cos\theta+i\sin\theta)$$

przy warunku $0\leq\theta<2\pi$, nadto niech μ jest taką liczbą zespoloną, $\mu=\tau(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, iż jest $\mu^2=-\xi$ czyli:

$$\tau^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)=-\rho_1(\cos\theta+i\sin\theta)$$

a więc

$$\tau=\sqrt{\rho_1}$$

$$2\varphi=\theta+(2k+1)\pi \qquad (k=\pm1,\pm2,\dots)$$

niech nadto μ ma część rzeczywistą dodatnią ($\theta>0$), więc $k=-1$ przeto $\varphi=\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}$ i wobec tego jest:

$$(2) \qquad \mu=\sqrt{\rho_1}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

Oznaczmy przez ρ odległość dwu punktów (x,y) i (x',y'), z których ostatni leży na krzywej C i uważajmy funkcyę:

$$(3) \qquad f(\rho,\mu)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\,dt$$

Połóżmy

$$(4) \qquad u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\sigma(x'y')\,f(\rho,\mu)\,ds$$

$$(5) \qquad v(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\sigma(x'y')\,\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\cos\vartheta\,ds$$

przyczem σ oznacza daną funkcyę ciągłą punktu krzywej C, zaś ϑ oznacza kąt, który tworzy normalna wewnętrzna do elementu ds z odległością ρ, skierowaną od elementu (ds) do punktu (x,y).
Funkcye $u(x,y)$, $v(x,y)$ zowiemy potencyałami uogólnionymi warstwy

pojedynczej, względnie podwójnej rozpostartej wzdłuż krzywej C z gęstością $\sigma(x'y')$.[x)]

§4. Musimy najpierw zbadać funkcyę $f(\varrho,\mu)$ i jej pochodną $\frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}$. Zauważmy, że jest także

$$f(\varrho,\mu) = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\,dt$$

jeżeli więc połóżymy $\mu = a+bi$, przyczem jest $a>0$, to jest

$$\left|\frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\right| < \frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}$$

$$|f(\varrho,\mu)| < \psi(\varrho,a)$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$\psi(\varrho,a) = \int^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\,dt$$

Jeżeli liczba ρ jest dowolna, byle nie mniejsza od dodatniej liczby ρ_0 to jest

$$\psi(\varrho,a) < \frac{1}{a\rho_0}$$

i ma znaczenie. Przeto $f(\varrho,\mu)$ ma określone znaczenie dla $\varrho \geqq \rho_0$ i podobnie można to wykazać dla pochodnej $\frac{df(\varrho,\mu)}{d\varrho}$

Ze względu na ciąg dalszy można dla funkcyi $f(\varrho,\mu)$ i rozważanej pochodnej wśród naszych założeń następujące ustawić nierówności:

$$(6) \qquad |f(\varrho,\mu)| < \frac{2}{a\rho}\cdot e^{-\frac{a\rho}{2}}$$

bo jest, jak widać, $e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}} < e^{-\frac{a(\varrho+t)}{2}}$

nadto:

$$(7) \qquad \left|\frac{df(\varrho,\mu)}{d\rho}\right| < \frac{\pi}{2} m e^{-a\rho} + \frac{e^{-a\rho}}{\rho}$$

przyczem jest $\rho \geqq \rho_0 > 0$, $a>0$, $m = |\mu|$.

§5. W niniejszym paragrafie rozwiniemy funkcyę $f(\varrho,\mu)$ na szereg

---

x) Ten specyalny kształt uogólnionych potencyałów otrzymać łatwo przez pewne rozważanie graniczne; dość uważać walec o kierownicy C i tworzących równoległych do trzeciej osi Kartezyuszowskiej (z) w trójwymiarowej przestrzeni, przecięty dwiema płaszczyznami $z=+\delta$, $z=-\delta$, gdzie liczba δ jest dodatnia, i potem trzeba założyć, że te dwie płaszczyzny oddalają się do nieskończoności. —

~~wśród~~ naszych założeń co do liczb (ϱ) i (μ). W tym celu musimy znaleźć równanie różniczkowe, któremu funkcya ta czyni zadość.

Kładąc dla krótkości

$$J_n = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^n}}\,dt, \qquad J_{m,n} = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^m}}\cdot t^n dt$$

widzimy, że jest najpierw:

$$\Delta J_1 = \mu^2 J_1 + \mu J_2 + J_3 - \mu^2 J_{3,2} - 3\mu J_{4,2} - 3 J_{5,2}$$

nadto z identyczności:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^m}}\cdot t^n\right) = -\frac{\mu e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^{m+1}}}\cdot t^{n+1} - \frac{\alpha e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^{m+2}}}\cdot t^{n+1} + \frac{e^{-\mu\sqrt{\varrho^2+t^2}}}{\sqrt{(\varrho^2+t^2)^m}}\cdot n t^{n-1}$$

przez całkowanie od 0 do ∞ otrzymujemy:

$$n J_{m,n-1} - m J_{m+2,n+1} - \mu J_{m+1,n+1} = 0$$

kładąc $n=1$ mamy

$$J_m = \mu J_{m+1,2} + m J_{m+2,2}$$

przeto jest:

$$J_2 = \mu J_{3,2} + 2 J_{4,2}$$

$$J_3 = \mu J_{4,2} + 3 J_{5,2}$$

wskutek czego ostatecznie otrzymujemy:

$$(8) \qquad \Delta f(\varrho,\mu) + \xi f(\varrho,\mu) = 0$$

bo jest $\mu^2 = -\xi$, $J_1 \equiv f(\varrho,\mu)$.

Równanie (8) można też napisać w formie:

$$(8^{bis}) \qquad \frac{d^2 f}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{df}{d\varrho} - \mu^2 f = 0$$

To jest równanie różniczkowe, o które nam chodziło. Aby znaleźć rozwinięcie funkcyi $f(\varrho,\mu)$ na szereg, znajdziemy ogólną całkę tego ~~szeregu~~, równania.

Naprzód znajdziemy całkę szczególną równania, kładąc

$$f = f_1 = \sum_0^\infty A_k \varrho^{2k}$$

przyczem otrzymujemy

$$A_{k+1} = \frac{\mu^2 A_k}{4(k+1)^2}$$

a kładąc $A_0 = 1$, mamy:

$$A_k = \frac{\mu^{2k}}{(2^k.k!)^2}$$

więc całką szczególną będzie funkcya:

$$f_1 = \sum_0^\infty \frac{\mu^{2k}}{(2^k.k!)^2}\cdot\varrho^{2k}$$

jak się łatwo można przekonać. Połóżmy teraz:

$$f = f_1 \int Z d\varrho$$

i otrzymamy

$$Z = \frac{Const}{\varrho.f_1^2}$$

Połóżmy przeto:

$$f = f_1(\log\varsigma + c) + f_2$$

gdzie c oznacza stałą, a f_2 funkcyę spełniającą równanie:

$$\frac{d^2 f_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{df_2}{d\varsigma} - \mu^2 f_2 = -\frac{2}{\rho}\frac{df_1}{d\varsigma}$$

Dość wyszukać tu całkę szczególną; kładę

$$f_2 = \sum_0 B_k \varsigma^{2k}$$

i otrzymuję

$$\frac{B_k}{A_k} - \frac{B_0}{A_0} = -\sum_{i=1}^{i=k}\frac{1}{i}$$

kładąc $B_0 = 0$ mamy

$$B_k = -A_k\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$$

przeto jest

$$f_2 = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{2k}}{(2^k.k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)\rho^{2k}$$

jak się łatwo przekonać szereg ten jest zbieżny i spełnia swe równanie różniczkowe. Ostatecznie mamy:

(9) $$f = C'\left[(\log\rho + c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{2k}}{(2^k.k!)^2}\rho^{2k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^{2k}}{(2^k.k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)\rho^{2k}\right]$$

gdzie C', c oznaczają stałe dowolne.

Obecnie mamy tak wyznaczyć stałe C', c, by funkcya f, określona wzorem (9) stała się identyczną z funkcyą $f(\varsigma,\mu)$.

W tym celu połóżmy:

$$f(\varsigma,\mu) = \int_0^1 \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}dt + \int_1^{\infty}\frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}dt$$

wtedy już przy każdej wartości na liczbę $(\rho)^1$ jest

$$\left|\int_1^{\infty}\frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}dt\right| \leq \int_1^{\infty}\frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}dt \leq \int_1^{\infty}\frac{e^{-at}}{t}dt < \int_1^{\infty} e^{-at}dt = \frac{1}{a}e^{-a}$$

więc wyraz ten osobliwości względem ρ dawać nie może.

Pierwszy wyraz wolno napisać we formie:

$$\int_0^1 \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{\mu^n}{n!}\left(\sqrt{\rho^2+t^2}\right)^n$$

zakładając nadto, że jest już $0<\rho_0<\rho\leq 1$, możemy szereg człon za członem całkować, przeto jest:

$$\int_0^1 \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}dt = \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{\rho^2+t^2}} + \sum_1^{\infty}(-1)^n\frac{\mu^n}{n!}\int_0^1(\rho^2+t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt$$

a że jest $$\int_0^1(\rho^2+t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt \leq 2^{\frac{n-1}{2}}$$

więc szereg strony prawej osobliwości względem ρ zawierać

nie może. Otóż jest:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\rho^2+t^2}} = \log\{\sqrt{\rho^2+1}+1\} - \log\rho$$

przeto jest

$$\lim_{\rho=0}\left\{\frac{f(\rho,\mu)}{\log\rho}\right\} = -1$$

a więc też jest

$$C' = -1$$

nadto jest

$$-c = \log 2 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{\mu^n}{n!\,n} + \int_1^\infty \frac{e^{-\mu t}}{t}\,dt$$

Wobec tego wolno położyć

$$(10)\quad \begin{cases} f(\rho,\mu) = -c - \log\rho - \rho^2 U \log\rho + \rho^2 V \\ \frac{df}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} - \rho\left[F(\rho) + A_1 \log\rho\right] \end{cases}$$

gdzie $U, V, F(\rho)$ i A_1 oznaczają pewne zbieżne szeregi potęgowe.

§6. Obecnie możemy przystąpić do badania własności potencyałów warstwy pojedynczej t. j. do badania funkcyi, określonej wzorem (4).

Znajdziemy górną granicę funkcyi $[u]$. Oznaczmy przez S górną granicę funkcyi $|\sigma(x'y')|$ wzdłuż krzywej C.

Załóżmy naprzód, że punkt (xy) tak jest obrany, że istnieje dolna granica ρ_0 różna od zera dla odległości ρ; wtedy $f(\rho,\mu)$ przedstawia funkcyę ciągłą i całka wzoru (4) ma sens i nadto według §4 jest

$$|f(\rho,\mu)| < \frac{1}{a\rho_0}$$

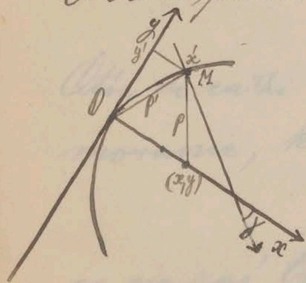
i wskutek tego jest

$$|u(x,y)| < \frac{S.\Lambda}{2\pi\rho_0 a}$$

gdzie oznaczyliśmy przez Λ długość łuku krzywej C.

Niech teraz punkt (x,y) leży dość blisko krzywej C i nadto później załóżmy, że punkt (x,y) nieograniczenie się zbliża do krzywej C w pewien sposób, który później określimy.

Niech punkt O jest najbliższym punktem krzywej C do punktu (x,y); za oś (x) weźmy normalną punktu O, za oś y styczną punktu O. Niech C_0 oznacza obustronne sąsiedztwo punktu O na krzywej, zaś C_1 część pozostałą krzywej C. Na mocy założeń o krzywej C (§1) możemy założyć, że C_0 jest na tyle małe, iż współrzędna x' punktu łuku C_0 jest funkcyą jednowartościową współrzędnej y' tegoż punktu.



Niech γ oznacza kąt ostry między normalną w punkcie M łuku C_0 a osią x. Według założenia o krzywej C istnieje stała g, zależna jedynie od krzywej, taka, iż jest $\gamma < g\rho'$, gdzie ρ' jest odległością punktów O i M; niech δ' oznacza maximum liczby ρ' dla łuku C_0 i niech będzie takie, że jest $g\delta' < 1$; wskutek tego jest $\gamma < 1$ i $\cos\gamma > 1-\frac{1}{2}\gamma^2 > 1-\frac{1}{2}g^2\rho'^2$, nadto stąd:

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1+\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}g^2\rho'^2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}g^2\rho'^2}{1-\frac{1}{2}g^2\rho'^2} < 1+g^2\rho'^2$$

tedy:

$$\left(\frac{dx'}{dy'}\right)^2 < 2g^2\rho'^2 + g^4\rho'^4 < 3g^2\rho'^2 \qquad \text{czyli}$$

$$\left|\frac{dx'}{dy'}\right| < g\rho'\sqrt{3} \leq g\delta'\sqrt{3}$$

a że jest

$$x' = \int_0^{y'} \frac{dx'}{dy'}\, dy'$$

więc jest

$$|x'| < g\delta'|y'|\sqrt{3} < |y'|\sqrt{3}$$

stąd dalej jest

$$\rho' = \sqrt{x'^2+y'^2} < 2|y'|$$

$$\left|\frac{dx'}{dy'}\right| < 2g.|y'|.\sqrt{3}$$

a z ostatniej nierówności stosując jeszcze raz wzór całkowy na x' mamy:

$$|x'| < \frac{2g\sqrt{3}.y'^2}{2} < 2gy'^2$$

Ostatecznie mamy następujące wzory dla dalszego ciągu nierówności:

$$(11) \qquad \cos\gamma > \frac{1}{2}$$

$$(12) \qquad |x'| < 2gy'^2 \leq 2g\rho'^2$$

$$(13) \qquad \frac{1}{\cos\gamma} < 1+g^2\rho'^2 < 1+4g^2y'^2$$

Obierzmy liczbę ρ_0 dodatnią w ten sposób, by dla punktów łuku C_1 była spełniona nierówność $\rho \geq \rho_0$. Połóżmy teraz:

$$u(xy) = u_0 + u_1$$

gdzie jest

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)} \sigma(x'y')\, f(\rho,\mu)\, ds \quad , \quad u_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C_1)} \sigma(x'y')\, f(\rho,\mu)\, ds$$

Otóż do całki u_1 z powodu, że jest $\rho \geq \rho_0$ wolno stosować poprzednie rozumowanie, które nas doprowadzi do nierówności:

$$|u_1| < \frac{S.\Lambda}{2\pi\rho_0 a};$$

co się zaś tyczy funkcyi u_0, to mamy:

$$|u_0| < \frac{S}{\pi}\int_{(C_0)} d\acute{y}\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}dt < \frac{2S}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}d\acute{y}\,dt$$

albowiem kładę

$$ds = \frac{d\acute{y}}{\cos\gamma} < 2d\acute{y}$$

$$\int_{C_0} d\acute{y}\ldots < 2\int_0^\infty d\acute{y}\ldots.$$

ale jest

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}d\acute{y}\,dt < \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\acute{y}^2+t^2}}}{\sqrt{\acute{y}^2+t^2}}d\acute{y}\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-aR}dR\,d\varphi = \frac{2\pi}{a}$$

jeżeli się podstawi $\acute{y} = R\cos\varphi$, $t = R\sin\varphi$. Przeto jest:

$$(14)\qquad |u| < |u_0| + |u_1| < \frac{4S}{a} + \frac{S\Lambda}{2\pi\rho_0 a} = \frac{AS}{a}$$

gdzie, jak widać, stała A zależy jedynie od krzywej; a że z § 3 wynika, że jest $a = \sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}$, więc nierówność (14) można zawsze napisać we formie

$$(15)\qquad |u| < \frac{AS}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

Stąd widzimy, że gdy punkt (x,y) dowolnie się zbliża po osi x do punktu O, moduł $|u|$ nie rośnie nieograniczenie; ponieważ zaś z drugiej strony nieciągłość funkcyi $f(\rho,\mu)$ jest tasama co funkcyi $(-\log\rho)$, przeto na mocy teoryi zwyczajnych potencyałów możemy powiedzieć, że funkcya $u(x,y)$ ma określony sens i w tym wypadku, gdy punkt (x,y) przyjmiemy na krzywej C. Wskutek tego funkcya u_0 dąży do zera wraz C_0, jakiekolwiek jest położenie punktu (x,y).

Oznaczmy teraz przez O, jak wyżej, punkt na krzywej C i punkt P na osi x, różny od punktu O; dla obu punktów obliczmy potencyał uogólniony $u(O)$, $u(P)$, które rozłożymy odpowiednio do części C_0 i C_1:

$$u(O) = u_0(O) + u_1(O)\quad;\quad u(P) = u_0(P) + u_1(P)$$

Jak powiedzieliśmy do każdej dowolnie małej i dodatniej liczby ε można obrać łuk C_0 tak małym (a różnym od zera), iż jest:

$$|u_0(O)| < \frac{\varepsilon}{3}\quad,\quad |u_0(P)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

nadto dla każdej liczby ε, powyżej określonej można obrać taką liczbę dodatnią δ, iż gdy ~~tylko~~ jest $\overline{OP} \leq \delta$, to jest także

$$|u_1(O) - u_1(P)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

wskutek tego przy takim wyborze punktów O, P będzie

$$|u(O) - u(P)| < \varepsilon$$

z czego wynika, że potencyał $u(x,y)$ jest funkcyą ciągłą, a więc, ~~oznaczając~~ używając zwykłych oznaczeń, mamy

$$\big(u(x,y)\big)_i = \big(u(x,y)\big)_e = \big(u(x,y)\big)_C$$

i granicę swą osiąga jednostajnie; mamy więc wykazać, że różnicę $u(O) - u(P)$ co do modułu można uczynić dowolnie małą niezależnie od punktu O byleby odcinek $\overline{OP}$ nie przekraczał pewnej określonej długości. Można bowiem tak obrać łuk C_0, aby niezależnie od położenia punktów O, P było $|u_0(O)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|u_0(P)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ponieważ funkcya $u_1(x,y)$ jest ciągłą, przeto istnieje taka dodatnia liczba h, iż gdy tylko odległość $\overline{OP}$ nie przewyższa liczby h, jest $|u_1(O) - u_1(P)| < \frac{\varepsilon}{3}$ niezależnie od położenia punktu O na krzywej C, a z tych nierówności wynikuje, że jest $|u(O) - u(P)| < \varepsilon$

Obierzmy jeszcze drugi punkt O_1 na krzywej C i różny od niego punkt P_1, leżący na normalnej punktu O_1. Uważajmy moduły:

$$|u(O) - u(P)|, \quad |u(P) - u(P_1)|, \quad |u(P_1) - u(O_1)|$$

do każdej dowolnie małej i dodatniej liczby ε można obrać taką dodatnią liczbę h, iż, gdy żaden z odcinków $\overline{OP}$, $\overline{PP_1}$, $\overline{P_1O_1}$ co do długości nie przewyższa liczby h, każdy z powyższych modułów jest mniejszy od liczby $\frac{\varepsilon}{3}$; gdy więc odległość $\overline{OO_1}$ nie przewyższa liczby $3h$ jest

$$|u(O) - u(O_1)| < \varepsilon$$

co wykazuje, że granice $(u(x,y))_e$, $(u(x,y))_i$ są funkcyami ciągłemi wzdłuż krzywej C.

§7. Z kolei zbadamy pochodną normalną funkcyi $u(x,y)$ t.j. gdy przyjmiemy szczególne położenie osi jak w §6 określiliśmy, zbadamy pochodną $\frac{\partial u}{\partial x}$. Załóżmy, że punkt (x,y) nie leży na krzywej C, a będąc dość bliskim krzywej C, znajduje się na normalnej punktu O, będącego na krzywej C możemy, zachowując oznaczenia §6 napisać:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x'y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)} \sigma(x'y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\cdot\frac{x-x'}{\rho}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_1)}\sigma(x'y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\frac{x-x'}{\rho}\,ds$$

gdzie jest, jak się łatwo można przekonać:

$$\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho} = -\int_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{(\rho^2+t^2)^{3/2}}\cdot\rho\cdot\left(\mu\sqrt{\rho^2+t^2}+1\right)dt$$

przyczem przy założeniu, że ρ ma dolną granicę różną od zera i że jest $a > 0$, pochodna $\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}$ czyni, jak wiemy, zadość nierówności 7 (str. 6). Wobec tego dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_1)}\sigma(x'y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}\,\frac{x-x'}{\rho}\,ds$$

jest funkcyą ciągłą zmiennej x i przeto jej granica dla $x=0$ równa się wartości powyższej całki dla $x=0$, a więc równa się wartości:

$$-\frac{1}{2\pi}\int \sigma(x'y')\,\frac{df(\varsigma'\mu)}{d\varsigma'}\cdot\frac{x'}{\rho'}\,ds$$

gdzie w myśl naszych (C₁) dotychczasowych oznaczeń ρ' oznacza odległość punktu O do od punktów krzywej C.

Pozostaje nam więc zbadanie granicy dla $x=0$ całki:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)} \sigma(x'y')\,\frac{df(\varsigma,\mu)}{d\varsigma}\,\frac{x-x'}{\rho}\,ds = J_1 - J_2$$

gdzie kładziemy

$$J_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)} \sigma(x'y')\cdot\frac{df(\varsigma,\mu)}{d\varsigma}\cdot\frac{x}{\rho}\cdot ds$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)} \sigma(x'y')\cdot\frac{df(\varsigma,\mu)}{d\varsigma}\cdot\frac{x'}{\rho}\cdot ds$$

Na mocy nierówności 7 (str 6) i 12 (str 10) widzimy, że funkcya podcałkowa całki J_2 jest na łuku C_0 ograniczona i ma wartość skończoną i dla $\rho=0$, wskutek czego J_2 jest funkcyą ciągłą względem x, przeto jej granica dla $x=0$ określi się równaniem:

$$\lim_{(x=0)} J_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)} \sigma(x'y')\,\frac{df(\varsigma'\mu)}{d\varsigma'}\cdot\frac{x'}{\rho'}\cdot ds$$

Na mocy równości 10 (str 9) możemy całce J_1 nadać postać następującą:

$$J_1 = -\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)} \frac{\sigma(x'y')\cdot ds}{\rho^2} - \frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)} \sigma\cdot F(\rho)\,ds - \frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)} A_1\cdot\sigma\cdot\log\rho\cdot ds$$

połóżmy dla prostoty:

$$K_1 = \frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)} \frac{\sigma\,ds}{\rho^2}\ ;\quad K_2 = \frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)} \sigma\,F(\rho)\,ds\ ;\quad K_3 = \frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)} A_1\,\sigma\,\log\rho\,ds$$

Jak wiadomo $F(\rho)$ oznacza pewien szereg, napewno w każdym razie zbieżny na łuku C_0, wobec tego jest:

$$\lim_{(x=0)} K_2 = 0$$

Ponieważ podobnie A_1 oznacza pewien szereg, zbieżny wzdłuż łuk C_0, więc można znaleźć górną granicę A_2 funkcyi $|A_1|$ na łuku C_0, a, że jak wiadomo z teoryi potencyałów logarytmicznych całka

$$\int_{(C_0)} |\log\rho|\,ds$$

ma skończoną granicę dla $x=0$, więc jest: $\lim\limits_{(x=0)} K_3 = 0$

Zostaje nam więc do zbadania, czy i jaką granicę dla $x=0$ ma całka K_1.

Jeżeli położymy $\sigma(x'y') = \sigma_0 + \Theta$, gdzie σ_0 oznacza wartość funkcyi $\sigma(x'y')$ w punkcie O, to na mocy ciągłości funkcyi $\sigma(x'y')$ możemy do dowolnie małej i dodatniej liczby ν obrać łuk C_0 taki, by wzdłuż

niego spełniona była nierówność $|\theta| < \nu$. Obrawszy łuk C_0, by wszystkim warunkom czynił zadość, mamy: $K_1 = J_1 + J_2$, gdzie położyliśmy

$$J_1 = \frac{x\sigma_0}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{ds}{\rho^2} \quad ; \quad J_2 = \frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{\theta\, ds}{\varrho^2}$$

Oznaczmy przez Q rzut punktu M, który jest środkiem elementu ds i oznaczmy przez λ odległość punktu $P(x, y=0)$ od punktu Q. Uważajmy $\mathcal{L} = \frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{(C_0)}\frac{dy'}{\lambda^2}$. Do liczby dowolnie małej i dodatniej ν można zawsze obrać tak łuk C_0, że różnica $\left|\frac{1}{x}J_1 - \mathcal{L}\right|$ co do modułu jest mniejsza od ν; z nierówności bowiem 13 (str 10) i ze znaczenia wielkości λ i ρ wynika, że można obrać tak łuk C_0, by liczba $\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\gamma}$ była wzdłuż łuku C_0 dowolnie mało (różniącą od liczby 1). Oznaczając granice dla współrzędnej y' punktów łuku C_0 przez $(-\varepsilon)$ i $(+\eta)$ mamy:

$$J_1 = \frac{x\sigma_0}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{dy'}{\lambda^2} + xN$$

gdzie, jak powiedzieliśmy jest $|N| < \nu$, przeto jest:

$$J_1 = \frac{\sigma_0}{2\pi}\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon}{x}\right\} + xN$$

z uwagi, że jest $\lambda^2 = x^2 + y'^2$. Podobnie zupełnie otrzymamy nierówność:

$$|J_2| < \frac{\nu}{2\pi}\left\{\operatorname{arctg}\left|\frac{\eta}{x}\right| + \operatorname{arctg}\left|\frac{\varepsilon}{x}\right|\right\} + \nu|x|$$

Z tego wynika, że jest w każdym razie $\lim\limits_{(x=0)} J_2 = 0$; nadto, gdy jest $x > 0$, to jest $\lim\limits_{(x=0)} J_1 = \frac{\sigma_0}{2}$, $\lim\limits_{(x=0)} K_1 = \frac{\sigma_0}{2}$; gdy zaś jest $x < 0$, to jest $\lim\limits_{(x=0)} J_1 = -\frac{\sigma_0}{2}$, $\lim\limits_{(x=0)} K_1 = -\frac{\sigma_0}{2}$. Wobec tego jest

$$\lim_{(x=0)} J_1 = \mp\frac{\sigma_0}{2}$$

zależnie od tego, czy zmienna x zdąża do zera stale przez wartości dodatnie czy też stale przez wartości ujemne.

Używając więc zwykłych oznaczeń, mamy:

$$(16)\quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dN}\right)_i = -\frac{\sigma_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\sigma(x'y')\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos\varphi\, ds \\ \left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{\sigma_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\sigma(x'y')\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos\varphi\, ds \end{cases}$$

gdzie dla krótkości wprowadziliśmy kąt φ między ~~osią~~ normalną

wewnętrzną w punkcie O na krzywej C, dla którego obliczamy granice pochodnej normalnej; a kierunkiem od punktu O do elementu ds czyli jest $\cos\varphi = \frac{x}{\rho'}$.

Stąd otrzymujemy następujące wnioski:

1) z całego obecnego rachunku widać, że granice swe osiąga pochodna normalna jednostajnie wzdłuż krzywej C;

2) że jest

$$(17) \quad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \sigma_0 \quad ;$$

3) istnieje pewna stała dodatnia $\mathcal{B}$, zależna jedynie od krzywej i taka, iż jest

$$(18) \begin{cases} \left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{\mathcal{B} m S}{a^2} \\ \left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{\mathcal{B} m S}{a^2} \end{cases}$$

gdzie jak wyżej oznaczyliśmy przez m moduł liczby μ, zaś przez S maximum modułu $|\sigma(x'y')|$ wzdłuż krzywej C.

Oznaczmy przez O punkt krzywej C, do którego się odnoszą równości 16 (str 15) i przez C_0 oznaczmy takie jego obustronne sąsiedztwo, że jest spełniona nierówność (12 11a (str 10), z której bezpośrednio wynika, że jest $|\cos\varphi| < 2g\rho'$; przez C_1 oznaczmy jak wyżej łuk pozostały z krzywej C i połóżmy:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \sigma(x'y') \frac{df(\rho'\mu)}{d\rho'} \cos\varphi\, ds = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C_0)} \sigma(x'y') \frac{df(\rho'\mu)}{d\rho'} \cos\varphi\, ds$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{(C_1)} \sigma(x'y') \frac{df(\rho'\mu)}{d\rho'} \cos\varphi\, ds$$

Jeżeli przez ρ_0 oznaczymy różną od zera granicę dolną odległości ρ' wzdłuż łuku C_1, przez Λ długość łuku krzywej C, to z uwagi na nierówność 7 (str 6) wynika bezpośrednio:

$$|\mathcal{L}_2| < \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} m e^{-a\rho_0} + \frac{e^{-a\rho_0}}{\rho_0}\right) S\Lambda$$

a że jest $\quad \frac{\pi}{2} m e^{-a\rho_0} < \frac{4m}{a^2\rho_0^2} \quad ; \quad \frac{e^{-a\rho_0}}{\rho_0} < \frac{1}{a\rho_0^2} < \frac{m}{a^2\rho_0^2}$

bo jest $\frac{m}{a} > 1$, więc istnieje stała dodatnia $\mathcal{B}'$, zależna je-

dynie od krzywej C taka, iż jest:

$$|\mathcal{L}_2| < \frac{B' m S}{a^2}$$

Z powodu nierówności 7 (str 6) r'' i nierówności na $|\cos\varphi|$, otrzymujemy nierówność:

$$|\mathcal{L}_1| < \frac{Sg}{\pi}\int_{(C_0)}\left(\frac{\pi}{2} m e^{-a\rho'} + \frac{e^{-a\rho'}}{\rho'}\right)\rho' ds$$

Z uwagi, że jest $\rho' \geq |y'|$, że zachodzą nierówności 11 (str 10) i następująca uwidoczniona na str 10: $\rho' < 2|y'|$, wynika:

$$|\mathcal{L}_1| < \frac{4Sg}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\left[\frac{\pi}{2} m e^{-a|y'|}|y'| + e^{-a|y'|}\right]dy'$$

gdzie ~~liczby~~ $(-\varepsilon)$, $(+\eta)$ oznaczają rzędne granicę łuku C_0, i tem bardziej jest:

$$|\mathcal{L}_1| < \frac{8Sg}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\pi}{2} m e^{-ay'}y' + e^{-ay'}\right]dy'$$

czyli

$$|\mathcal{L}_1| < 4Sg\cdot\frac{m}{a^2} + \frac{8Sg}{\pi a} < 12Sg\cdot\frac{m}{a^2}$$

istnieje więc stała dodatnia B'' zależna jedynie od krzywej C i taka, iż jest

$$|\mathcal{L}_1| < \frac{B'' m S}{a^2}$$

kładąc więc $B = B' + B''$ i

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\sigma(x'y')\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho'}\cos\varphi\, ds\right| < |\mathcal{L}_1| + |\mathcal{L}_2|$$

tem samem udowodniliśmy nasze wzory 18 (str 15)

§8. Zbadajmy zachowanie się potencyału $u(x,y)$ w nieskończoności. Niech najkrótsza odległość punktu xy od punktów krzywej C jest P, która to liczba niech już będzie różną od zera; wtedy stosując nierówność 6 (str 6) na funkcyę $f(\rho,\mu)$ otrzymujemy:

$$|u| < \frac{S\Lambda}{\pi a P}\cdot e^{-\frac{aP}{2}}$$

gdzie Λ oznacza długość łuku krzywej C. Ze względu zaś na nierówność (7) (str. 6) na pochodną $\frac{df(\rho,\mu)}{d\rho}$ otrzymujemy dla pochodnych funkcyi $u(xy)$ nierówności:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{S\Lambda}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} m e^{-aP} + \frac{e^{-aP}}{P}\right)$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{S\Lambda}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} m e^{-aP} + \frac{e^{-aP}}{P}\right)$$

z powyższych nierówności wynika, że jest

$$(19)\quad \begin{cases} \lim\limits_{p=\infty} \left(P^n \cdot u(xy)\right) = 0 \\ \lim\limits_{p=\infty} \left(P^n \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \\ \lim\limits_{p=\infty} \left(P^n \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}$$

gdzie n przedstawia dowolną liczbę całkowitą.

§9. Zajmiemy się obecnie uogólnionymi potencyałami warstw podwójnych, określonymi wzorem 5 (str 5)

Z własności funkcyi $\sigma(x'y')$ i $f(\varsigma, \mu)$ wynika, że funkcya $v(xy)$ jest zupełnie określona, o ile dolna granica wielkości ς jest odmienna od zera. Załóżmy więc, że punkt x, y, dla którego obliczamy wartość potencyału $v(x,y)$ leży [?] z dowolnym punkcie O na krzywej C. Za oś x weźmy normalną wewnętrzną do krzywej w punkcie O narysowaną, zaś styczną tego punktu za oś y; przez ς' rozumieć będziemy odległości punktów krzywej C od punktu O. Przez C_0 rozumieć będziemy takie obustronne sąsiedztwo punktu O na krzywej C, iż dla punktów łuku C_0 są spełnione nierówności str 10; przez C_1 rozumiemy pozostałą część krzywej C. Połóżmy więc

$$-v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)} \sigma(x'y')\, \frac{df(\varsigma'\mu)}{d\varsigma'} \cos\vartheta' ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_1)} \sigma(x'y')\, \frac{df(\varsigma'\mu)}{d\varsigma'} \cos\vartheta' ds$$

gdzie ϑ' oznacza kąt między kierunkiem od elementu ds do punktu O a normalną N wewnętrzną, należącą do elementu ds. Że druga całka strony prawej ma określony sens, to kwestyi nie ma żadnej, badajmy więc całkę pierwszą.

Oznaczmy przez M dowolny punkt $x'y'$ łuku C_0, którego normalna wewnętrzna niech ma dostawy kierunkowe $\cos\gamma$ i $\sin\gamma$, przeto jest

$$\cos\vartheta' = -\left(\frac{x'}{\rho'}\cos\gamma + \frac{y'}{\rho'}\sin\gamma\right)$$

Z nierówności (str 10):

$$\cos\gamma > 1 - \tfrac{1}{2} g^2 \rho'^2 > \tfrac{1}{2}$$

otrzymujemy $\quad (20) \quad |\sin\gamma| < g\varsigma'$,

a dalej z nierówności tej i nierówności 12 (str 10) i z okoliczności, że jest

$$|y'| < \rho'$$

wnioskujemy że istnieje stała dodatnia G, zależna jedynie od krzywej taka, iż wzdłuż łuku C_0 jest

$$(21) \qquad |\cos\vartheta'| < G\varsigma'$$

Stąd i ze nierówności 7 (str 6) napisanej dla wielkości ς' wynika, że funkcya

$\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos\vartheta'$ jest co do modułu skończoną wzdłuż łuku C_0, przeto funkcya $v(x,y)$ ma i w tym przypadku, gdy punkt x,y leży na krzywej C, określone znaczenie i określimy je symbolem:

$$v' = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\sigma(x'y')\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos\vartheta' ds.$$

§10. Zbadajmy, czy istnieją granice w tym wypadku, gdy punkt xy, dla którego obliczamy funkcyę $v(xy)$, będąc stale albo w obszarze $\mathfrak{D}$ albo w obszarze $\mathfrak{D}'$ zbliża się po normalnej do krzywej C aż do spodka normalnej czyli używając zwykłych oznaczeń, zbadajmy, czy istnieją granice v_e i v_i.
W tym celu połóżmy:

$$-v(xy) = J_0 + J_1$$

gdzie jest

$$J_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\cos\vartheta\, ds\,;\quad J_1 = \frac{1}{2\pi}\int\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\cos\vartheta\, ds$$

przyczem zakładamy, że punkt xy jest tak bliskim krzywej C, nie leżąc na niej, że istnieje do niego najbliższy jeden punkt krzywej, punkt O, który przyjmujemy za początek układu współrzędnych, omówionego już powyżej, nadto litery C_0, C_1 mają także już poprzednio określone znaczenie.
Zauważmy, że J_1 przedstawia funkcyę ciągłą punktu $(x, y=0)$, przeto istnieją granice dla $x=0$ tej funkcyi, gdy liczba x jest stale dodatnia lub stale ujemna i jest:

$$J_{1e} = J_{1i} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_1)}\sigma(x'y')\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos\vartheta' ds$$

Z drugiej strony, gdy przez $x'y'$ oznaczymy współrzędne punktu łuku C_0, przez $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ dostawy kierunkowe normalnej zewnętrznej, wykreślonej do krzywej C w punkcie elementu ds, mamy:

$$\cos\vartheta = \frac{x-x'}{\varrho}\cos\gamma - \frac{y'}{\varrho}\sin\gamma$$

i stąd jest

$$J_0 = K_1 - K_2 - K_3$$

gdzie położyliśmy

$$K_1 = \frac{x}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x'y')\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\frac{\cos\gamma}{\varrho}ds\,;\quad K_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x'y')\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\frac{x'\cos\gamma}{\varrho}ds$$

$$K_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\sigma(x'y')\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\frac{y'\sin\gamma}{\varrho}ds$$

Na mocy nierówności 7 (str 6) istnieje przy ~~dat~~ danej liczbie μ stała dodatnia A zależna od krzywej C i liczby μ taka, iż jest $\left|\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\right| < \frac{A}{\varrho}$ stąd wynika, że jest

$$\left|K_2\right| < \frac{SA}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\frac{|x'|}{\varrho^2}\,ds < \frac{SA}{2\pi}\int\limits_{(C_0)}\frac{|x'|}{\varrho'^2}\cdot\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 ds$$

gdzie przez ϱ' oznaczyliśmy odległość punktu O od tego punktu łuku C_0 który od punktu $(x, y=0)$ jest odległy na ϱ. Otóż kwadrat stosunku $\frac{\varrho'}{\varrho}$ jest skończony przy dowolnem położeniu punktu $x'y'$ na łuku C_0 i punktu $(x, y=0)$ na normalnej punktu O, ponieważ nadto spełniona jest nierówność 12 (str 10), przeto funkcya podcałkowa całki K_2 jest skończona, całka K_2 jest funkcyą ciągłą zmiennej x; wskutek tego istnieją granice całki K_2 przy zbliżaniu się punktu $x, y=0$ do punktu O w sposób powyżej opisany; tedy jest:

$$K_{2e} = K_{2i} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0}\sigma(x'y')\,\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\,\frac{x'\cos\gamma}{\varrho'}\,ds$$

Podobnie rozumując jak powyżej, przy pomocy nierówności 20 (str 17) i faktu, że jest $|y'| < \varrho$, otrzymujemy nierówność:

$$\left|\sigma(x'y')\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\,\frac{y'\sin\gamma}{\varrho}\right| < SAg\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2$$

czyli jak powyżej, dochodzimy do wniosku, że funkcya podcałkowa całki K_3 jest skończona i że przeto istnieją granice funkcyi K_3 przy powyżej opisanem przejściu do granicy i nadto jest:

$$K_{3e} = K_{3i} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_0}\sigma(x'y')\,\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\,\frac{y'\sin\gamma}{\varrho'}\,ds$$

Zostaje nam do zbadania całka K_1. Otóż na mocy drugiej z równości 10 (str 9) otrzymujemy:

$$K_1 = -\frac{x}{2\pi}\int\limits_{C_0}\frac{\sigma\cos\gamma}{\rho^2}\,ds - \frac{x}{2\pi}\int\limits_{C_0}\sigma\cos\gamma\left[F(\rho) + A_1\log\varrho\right]ds$$

druga całka strony prawej dąży widocznie do zera, gdy liczba x dąży do zera. Połóżmy $\sigma\cos\gamma = \sigma_0 + \Theta$, gdzie σ_0 oznacza wartość funkcyi $\sigma(x'y')$ w punkcie O; do każdej dowolnie małej dodatniej liczby ν można obrać C_0 na tyle małe, ~~by~~ iżby wzdłuż tego łuku C_0 obok dawnych nierówności była spełniona nowa nierówność $|\Theta| < \nu$. Wobec tego możemy dosłownie powtórzyć rozumowanie str. 14 odnoszące się tamże do całek J_1 i J_2 i przeto możemy powiedzieć, że jest

$$\lim_{(x=0)} K_1 = \mp\frac{\sigma_0}{2}$$

gdzie trzeba obrać znak górny lub dolny zależnie od tego, czy liczba x dąży do zera przez wartości dodatnie czy przez wartości ujemne; wskutek specyalnego wyboru układu współrzędnych mamy:

$$K_{1i} = -\frac{\sigma_0}{2} \quad ; \quad K_{1e} = +\frac{\sigma_0}{2}$$

Ostatecznie dochodzimy do wniosku następującego: istnieją granice v_i i v_e i nadto jest:

$$(22) \quad \begin{cases} v_i = \frac{\sigma_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x'y') \frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'} \cos\vartheta' ds \\ v_e = -\frac{\sigma_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x'y') \frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'} \cos\vartheta' ds \end{cases}$$

czyli jest

$$(23) \quad \begin{cases} v_i = \frac{\sigma_0}{2} + v' \\ v_e = -\frac{\sigma_0}{2} + v' \end{cases}$$

a stąd jest

$$(24) \quad v' = \frac{v_i + v_e}{2}$$

$$(25) \quad v_i - v_e = \sigma_0$$

Nadto istnieje pewna stała dodatnia C zależna jedynie od krzywej i taka, że jest:

$$(26) \quad \begin{cases} \left| v_i - \frac{\sigma_0}{2} \right| < \frac{C S_m}{a^2} \\ \left| v_e + \frac{\sigma_0}{2} \right| < \frac{C S_m}{a^2} \end{cases}$$

Ponieważ funkcya $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ ze strony 15 różni się od funkcyi $(-v')$ tem, że w pierwszej pod całką figuruje czynnik $\cos\varphi$, kiedy w drugiej zamiast tego znajduje się czynnik $\cos\vartheta'$, ale na str 15 czytamy, że jest $|\cos\varphi| < 2\varrho\varrho'$, kiedy nierówność 21 (str 17) jest formalnie podobna, przeto rachunki obecne dążące do uzasadnienia nierówności 26 będą podobne formalnie do rachunków str 15 i 16 dążących do znalezienia nierówności na funkcyę $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

Nadto zauważyć musimy, że z toku całego takiego rachunku widać, że granice swe osiąga funkcya v wzdłuż krzywej C jednostajnie.

Trzeba bowiem uważać np. różnicę

$$v(xy) - v_i' = v - \frac{\sigma_0}{2} - v' = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)} \sigma(x'y')\left\{\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos\vartheta' - \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta\right\}ds - \frac{\sigma_0}{2}$$

gdzie punkt P(x,y) leży dość blisko krzywej C na normalnej punktu O krzywej C, do którego się odnoszą wartości v_i' i σ_0. Całkę ~~stroną~~ rozbijamy na dwie części, z których jedna odnosi się do łuku C_0, druga do łuku C_1, gdzie łuki C_0 i C_1 zostały określone jak powyżej. Całkę odnoszącą się do łuku C_1, jako ciągłą, można przez (odpowiedni wybór ~~odci~~ długości odcinka OP niezależnie od położenia punktu O na krzywej C, uczynić dowolnie małą. W całkach odnoszących się do łuku C_0, przyjąwszy szczególne, powyżej już podane, położenie osi współrzędnych, kładziemy na ~~mocy~~ drugiej równości 10 (str. 9):

$$\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos\vartheta' - \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta = \left\{-\frac{1}{\varrho'} - \varrho'\left[F(\varrho') + A_1'\log(\varrho')\right]\right\}\left\{-\frac{x'}{\rho'}\cos\gamma - \frac{y'}{\rho'}\sin\gamma\right\} -$$

$$- \left\{-\frac{1}{\rho} - \rho\left[F(\varrho) + A_1\log\varrho\right]\right\}\cdot\left\{\frac{x-x'}{\rho}\cos\gamma - \frac{y'}{\rho}\sin\gamma\right\}$$

wśród oznaczeń dotąd używanych, nadto położyliśmy

$$A_1' = A_1(\rho')$$

najważniejszy wyraz tu wystąpi następujący:

$$\frac{x}{2\pi}\int_{(C_0)} \frac{\sigma\cos\gamma}{\rho^2}ds$$

który ~~przy~~ powiększony ~~o~~ o $\left(-\frac{\sigma_0}{2}\right)$ można, jak widać, uczynić dowolnie małym niezależnie od położenia punktu O na krzywej C.

§11. Zajmiemy się obecnie normalną ~~pro~~ pochodną i istnieniem jej granicy dla funkcyi $v(x,y)$.

Załóżmy, jak w §10 że punkt $P(x,y)$, dla którego obliczamy ~~funk~~ ~~$\sigma(x,y)$~~ funkcyę $v(x,y)$, leży dość blisko punktu O na krzywej C, że leży on na normalnej punktu O i że obraliśmy osie układu współrzędnych, jak w §10. Normalną pochodną funkcyi $v(xy)$ oznaczymy $D_{ni}(v)$ lub $D_{ne}(v)$ zależnie od tego, czy odcięta punktu P jest dodatnią, czy ujemną.

Wskutek drugiej równości 10 (str. 9). dość zbadać granicę, o ile istnieje, pochodnej normalnej funkcyi:

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_{C_0} \sigma(x'y')\frac{1}{\varrho}\cos\vartheta\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{C_0} \sigma(x'y')\,\rho F(\varrho)\cos\vartheta\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{C_0} \sigma A_1\rho\log\rho\cos\vartheta\, ds$$

jeżeli rozdzielimy naszą krzywą C na części C_0 i C_1 metodą już przez nas używaną.

a, że jest $\cos\vartheta = \frac{x-x'}{\rho}\cos\gamma - \frac{y'}{\rho}\sin\gamma$
jeżeli $\cos\gamma$ i $\sin\gamma$ są dostawami normalnej do krzywej C w miejscu elementu ds, zaś $(x'y')$ są współrzędnemi punktów krzywej C.
Stąd wynika, że jest:

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\frac{\sigma(x-x')\cos\gamma}{\rho^2}ds - \frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\frac{\sigma y'}{\rho^2}\sin\gamma\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma.F(\rho).(x-x')\cos\gamma\, ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma.F(\rho).y'\sin\gamma\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma A_1(x-x')\cos\gamma.\log\rho\, ds - \frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma A_1 y'\sin\gamma.\log\rho\, ds$$

Nadto uważajmy funkcyę:

$$v_0 = \frac{\sigma_0}{2\pi}\int_C\frac{\cos\vartheta}{\rho}ds = \frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{C_0}\frac{\cos\vartheta}{\rho}ds + \frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{C_0}\frac{\cos\vartheta}{\rho}ds$$

~~mającą wartość stałą~~, gdzie σ_0 oznacza wartość funkcyi $\sigma(x'y')$ w punkcie O. Funkcya v_0, jak wiadomo, jest zwykłym potencyałem warstwy podwójnej o gęstości stałej σ_0 rozpostartej wzdłuż krzywej C_0 i ma wartość stałą, dla punktów wewnątrz obszaru D równą się liczbie σ_0, zaś zewnątrz krzywej równą jest zeru; wskutek tego istnieją pochodne normalne $D_{ni}(v_0)$, $D_{ne}(v_0)$ i równe zeru, podobnie równe zeru są granice tych pochodnych, gdy zmienna x dąży do zera.
Oczywiście ~~to samo stosuje się do~~ funkcyi:

$$w_0 = \frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{C_0}\frac{\cos\vartheta}{\rho}ds = \frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{C_0}\frac{x-x'}{\rho^2}\cos\gamma\, ds - \frac{\sigma_0}{2\pi}\int_{C_0}\frac{y'}{\rho^2}\sin\gamma\, ds$$

ma pochodną $\frac{dw_0}{dn}$ i jej granicę.
Połóżmy

$$H = -(x'\cos\gamma + y'\sin\gamma)$$

będzie to funkcya od zmiennej x niezależna i nadto wskutek nierówności 12 (str 10) i 20 (str 17) będzie

(27) $$|H| < 2g y'^2 + g\rho|y'| < 4g y'^2$$

bo jest według str 10 także $|\rho'| < 2|y'|$
Wprowadzając funkcyę H otrzymujemy:

$$w - w_0 = \frac{x}{2\pi}\int_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)\cos\gamma}{\rho^2}ds + \frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)H}{\rho^2}ds + \frac{x}{2\pi}\int_{C_0}\sigma F(\rho)\cos\gamma\, ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma.F(\rho).H\, ds + \frac{x}{2\pi}\int_{C_0}\sigma A_1\cos\gamma\log\rho\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma A_1 H\log\rho\, ds.$$

Różniczkując co do x, otrzymujemy:

$$(28)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial(w-w_0)}{\partial x}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{C_0}\dfrac{(\sigma-\sigma_0)\cos\gamma}{\rho^2}ds-\dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int_{C_0}\dfrac{(\sigma-\sigma_0)(x-x')\cos\gamma}{\rho^4}ds-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{C_0}\dfrac{(\sigma-\sigma_0)H(x-x')}{\rho^4}ds+\\ +\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{2\pi}\displaystyle\int_{C_0}\sigma F(\rho)\cos\gamma\,ds\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{C_0}\sigma . F(\rho)H\,ds\right)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{C_0}\sigma A_1\cos\gamma\log\rho\,ds+\dfrac{x}{2\pi}\displaystyle\int_{C_0}\sigma . \dfrac{dA_1}{d\rho}\dfrac{x-x'}{\rho}\cos\gamma\log\rho\,ds\\ +\dfrac{x}{2\pi}\displaystyle\int_{C_0}\sigma A_1\cos\gamma . \dfrac{x-x'}{\rho^2}ds+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{C_0}\sigma\dfrac{dA_1}{d\rho}\dfrac{x-x'}{\rho}H\log\rho\,ds+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{C_0}\sigma A_1 H . \dfrac{x-x'}{\rho^2}ds\end{cases}$$

Utwórzmy iloczyn

$$x . \frac{\partial(w-w_0)}{\partial x}$$

i badajmy jego granicę, gdy zmienna x dąży do zera.
Otóż na łuku C_0 jest:

$$|H| < 4gy'^2 \; ; \; |x-x'| < \rho \; ; \; \frac{1}{\rho} < \frac{1}{|y'|}$$

nadto można ten łuk C_0 uczynić tak małym, że jest wzdłuż niego:

$$|\sigma-\sigma_0| < \nu$$

gdzie ν oznacza naprzód żądaną dodatnią liczbę, choćby dowolnie małą. Na mocy rozumowań str. 14 można wyznaczyć taką liczbę dodatnią d iż, gdy tylko jest $|x| < d$, ~~jest~~ istnieje górna granica L dla modułu

$$\left|\frac{x}{2\pi}\int\frac{ds}{\rho^2}\right|$$

wobec tego jest:

$$\left|\frac{x}{2\pi}\int_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)\cos\gamma}{\rho^2}ds\right| < L.\nu$$

a że jest $ds=\frac{dy'}{\cos\gamma}$, więc jest:

$$\left|\frac{x^2}{\pi}\int_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)(x-x')\cos\gamma}{\rho^4}ds\right| < \frac{\nu x^2}{\pi}\int_{C_0}\frac{dy'}{\rho^3}$$

Jeżeli środek M elementu ds ma punkt Q jako rzut na osi y i jeżeli przez λ oznaczymy odległość punktu M od punktu P, jeżeli $(-\varepsilon)$ i $(+\eta)$ są rzędnemi punktów końcowych łuku C_0, to do liczby ν można ~~obrać tak małe C_0~~ tak zmniejszyć C_0, iż jest

$$\left|\int_{C_0}\frac{dy'}{\rho^3}-\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{dy'}{\lambda^3}\right| < \nu$$

stąd jest

$$\left|\int_{C_0}\frac{dy'}{\rho^3}\right| < \int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{dy'}{\lambda^3}+\nu < 2\int_0^{\infty}\frac{dy'}{\lambda^3}+\nu = \frac{2}{x^2}+\nu$$

ostatecznie istnieje stała dodatnia taka, iż jest:

$$\left|\frac{x^2}{\pi}\int_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)(x-x')\cos\gamma}{\rho^4}ds\right| < M.\nu$$

Całkę $\frac{x}{\pi}\int\limits_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)H(x-x')}{\rho^4}ds$ rozłożymy na dwie części

$$\frac{x^2}{\pi}\int\limits_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)H}{\rho^4}ds - \frac{x}{\pi}\int\limits_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)Hx'}{\rho^4}ds$$

Na mocy nierówności 12 (str. 10) i 27 (str. 22) otrzymujemy:

$$\left|\frac{x}{\pi}\int\limits_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)Hx'}{\rho^4}ds\right| < \frac{8g^2|x|\nu}{\pi}\int\limits_{C_0}\frac{y'^4}{\rho^4}ds < \frac{8g^2|x|\cdot\nu}{\pi}\int\limits_{(C_0)}ds$$

bo jest także $|y'|<\rho$; wyraz badany dąży więc wraz z liczbą x do zera; podobnie otrzymamy:

$$\left|\frac{x^2}{\pi}\int\limits_{C_0}\frac{(\sigma-\sigma_0)H}{\rho^4}ds\right| < \frac{4g\nu x^2}{\pi}\int\limits_{C_0}\frac{y'^2}{\rho^4}ds < \frac{4g\nu x^2}{\pi}\int\limits_{C_0}\frac{ds}{\rho^2}$$

a więc strona prawa dąży wraz z liczbą x do zera.

Dalsze wyrazy równości 28 (str. 23) będą najwidoczniej małemi już to wraz z liczbą x, już to można je uczynić dowolnie małemi przez odpowiedni wybór łuku C_0.

Ostatecznie dochodzimy do wniosku następującego: jeżeli przez δ oznaczymy najkrótszą odległość punktu (xy) od krzywej C, to jest w każdym razie

$$(29)\quad\begin{cases}\lim\limits_{(\delta=0)}\left[\delta\cdot D_{ni}(v)\right]=0\\ \lim\limits_{(\delta=0)}\left[\delta\cdot D_{ne}(v)\right]=0\end{cases}$$

choćby nawet pochodne $D_{ni}(v)$, $D_{ne}(v)$ przy zbliżaniu się nieograniczonem punktu (xy) do krzywej C granicy nie posiadały.

§12. Zapytajmy teraz o kwestyę następującą: jakie założenie co do funkcyi $\sigma(x'y')$ wystarcza na to, by istniały granice pochodnych normalnych $D_{ni}(v)$, $D_{ne}(v)$ funkcyi $v(xy)$, gdy punkt (xy) zbliża się nieograniczenie do punktu dowolnego krzywej C.

Jeżeli przez $x'y'$ oznaczymy współrzędne punktów krzywej C, przez $\cos\gamma$ i $\sin\gamma$ dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej do tej krzywej, to otrzymamy

$$\cos\vartheta=\frac{x-x'}{\rho}\cos\gamma+\frac{y-y'}{\rho}\sin\gamma$$

a zawsze możemy obrać taki kierunek liczenia łuku s krzywej C, że jest:

$$\cos\gamma=-\frac{dy'}{ds}\ ;\quad \sin\gamma=+\frac{dx'}{ds}$$

więc, ponieważ też jest $\rho^2=(x-x')^2+(y-y')^2$, więc jest:

$$\cos\vartheta=-\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dy'}{ds}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dx'}{ds}$$

wobec tego jest

$$v=\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial v_2}{\partial y}$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$v_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \sigma \frac{dy'}{ds} f(\varrho,\mu)\, ds \;;\quad v_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \sigma \frac{dx'}{ds} f(\varrho,\mu)\, ds$$

przeto funkcye v_1 i v_2 określają pewne potencyały uogólnione warstw pojedynczych, rozpostartych wzdłuż krzywej C.

Załóżmy, że punkt x, y jest dość blisko krzywej C na normalnej punktu O krzywej, że oś x kierujemy wzdłuż wewnętrznej lub zewnętrznej normalnej punktu O, a oś y wzdłuż stycznej, mającej kierunek zgodny z dodatnim kierunkiem liczenia łuku s na krzywej C i że układ jest t. zw. „prawym" układem. Normalną pochodną funkcyi v będzie więc pochodna:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \sigma(x'y')\left[\frac{dy'}{ds}\frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial x^2} - \frac{dx'}{ds}\frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial x \partial y}\right] ds$$

Z równania 8 (str. 7) otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial y^2} - \xi f(\varrho\mu)$$

a stąd jest:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)} \sigma(x'y')\left[\frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial y^2}\frac{dy'}{ds} + \frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial x \partial y}\frac{dx'}{ds}\right] ds - \frac{\xi}{2\pi}\int\limits_C \sigma(x'y') f(\varrho\mu)\frac{dy'}{ds} ds$$

Otóż jest

$$\frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial y^2}\frac{dy'}{ds} + \frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial x\partial y}\frac{dx'}{ds} = \frac{d^2 f(\varrho\mu)}{d\varrho^2}\frac{y-y'}{\varrho}\left[\frac{x-x'}{\rho}\frac{dx'}{ds} + \frac{y-y'}{\rho}\frac{dy'}{ds}\right] + \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-y'}{\varrho}\right)\frac{dx'}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y'}{\varrho}\right)\frac{dy'}{ds}\right]$$

i jak łatwo się przekonać, prawa strona tej równości jest równa wyrażeniu: $-\frac{d}{dy'}\left(\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial y}\right)\frac{dy'}{ds}$, więc mamy:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \sigma(x'y')\frac{d}{dy'}\left(\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial y}\right)\frac{dy'}{ds} ds - \frac{\xi}{2\pi}\int\limits_C \sigma(xy) f(\varrho\mu)\frac{dy'}{ds} ds$$

Druga całka strony prawej jest potencyałem warstwy pojedynczej o gęstości $\sigma\frac{dy'}{ds}$, przeto ma granicę, gdy x dąży do zera i tą granicę niezależną od tego, czy liczba x dąży do zera stale będąc dodatnią czy stale będąc ujemną.

W punkcie O wyrażamy, jak to już niejednokrotnie czyniliśmy, łuk C_0 jako sąsiedztwo obustronne punktu O i łuk C_1. Całkę pierwszą prawej strony rozłóżmy na dwie całki odnośnie do łuku C_0 i łuku C_1; oczywiście wystarczy zbadać całkę odniesioną do łuku C_0, bo tamta część jest funkcyą ciągłą względem zmiennej x i posiada granicę, która nie zależy od tego, czy zmienna x dąży do

zera stale przez wartości dodatnie czy przez wartości ujemne.
Uważajmy przeto całkę

$$w=\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma(x'y')\frac{d}{dy'}\left(\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial y}\right)\frac{dy'}{ds}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\sigma(x'y')\frac{d}{dy'}\left(\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial y}\right)dy'$$

gdzie $(-\varepsilon,+\eta)$ oznaczają rzędne końców łuku C_0. Załóżmy teraz, że funkcya $\sigma(x'y')$ ma pochodną $\frac{d\sigma}{dy'}$ ciągłą i skończoną wzdłuż łuku C_0; przy takiem założeniu mamy:

$$w=\left\{\frac{1}{2\pi}\sigma(x'y')\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial y}\right\}_{-\varepsilon}^{+\eta}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{d\sigma}{dy'}\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial y}dy'=$$

$$=\left\{\frac{1}{2\pi}\sigma(x'y')\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial y}\right\}_{-\varepsilon}^{+\eta}-\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{d\sigma}{dy'}f(\xi\mu)dy'\right\}$$

Ponieważ pierwszy wyraz ma granicę, niezależnie od tego, czy zmienna x dąży do zera, będąc stale dodatnią, czy będąc stale ujemną, przeto należy zbadać styczną pochodną potencyału warstwy pojedynczej, rozpostartej na odcinku; oznaczmy przez Q rzut punktu $(x'y')$ i przez λ odległość tego punktu Q od punktu $P(x,y=0)$. Nietrudno zauważyć, że przez odpowiednie zmniejszenie łuku C_0 dość uważać całkę

$$W=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\tau(y')f(\lambda,\mu)dy'$$

gdzie $\tau(y')$ jest funkcyą ciągłą i skończoną w interwale $(-\varepsilon,+\eta)$
Stąd mamy:

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\tau(y')\frac{df(\lambda,\mu)}{d\lambda}\cdot\frac{y'}{\lambda}dy'$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\tau(y')\left\{\frac{1}{\lambda}+\lambda\left[F(\lambda)+A_1\log\lambda\right]\right\}\frac{y'}{\lambda}dy',$$

jeżeli uwzględnimy drugą równość 10 (str. 9). Dość uważać tu „najgorszy" wyraz:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\tau(y')\frac{y'}{\lambda^2}dy'$$

a wskutek ciągłości funkcyi $\tau(y')$, jeżeli przez τ_0 oznaczymy wartość funkcyi $\tau(y')$ w punkcie 0, dość uważać całkę:

$$\frac{\tau_0}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{y'}{\lambda^2}dy'$$

gdzie dla prostoty pisma zostawiliśmy te same granice $(-\varepsilon,+\eta)$ całkowania; a że jest

$$\int_{-\varepsilon}^{+\eta}\frac{y'dy'}{\lambda^2}=\frac{1}{2}\left[\log(x^2+y'^2)\right]_{-\varepsilon}^{+\eta}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+\eta^2}{x^2+\varepsilon^2}\right)$$

więc funkcya W ma granicę dla pochodnej stycznej, gdy x zdąża do

zera już to przez wartości dodatnie już to przez wartości ujemne i ~~z~~ tej okoliczności granice te są niezależne. Z tego wynika, że ciągłości pochodnej $\frac{d\sigma}{dy'}$ zapewnia istnienie granicy dla pochodnej normalnej funkcyi v i nadto wśród zwykłych oznaczeń jest:

$$(30) \qquad \left(\frac{dv}{dN}\right)_e = \left(\frac{dv}{dN}\right)_i$$

§13. Obecnie wyprowadzimy nierówności na pochodną normalna funkcyi $u(xy)$ i na funkcyę $v(xy)$.

Załóżmy najpierw, że punkt (x, y) jest tak położony że istnieje dolna granica, różna od zera dla liczby ϱ; oznaczmy tę granicę przez d; oznaczmy dalej przez $\cos\gamma$ i $\sin\gamma$ dostawy normalnej wewnętrznej do krzywej C, przeto, jak wiadomo, jest

$$\frac{du}{dN} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\gamma$$

a więc

$$\frac{du}{dN} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(C)}\sigma(x'y')\,\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\left\{\frac{x-x'}{\varrho}\cos\gamma + \frac{y-y'}{\varrho}\sin\gamma\right\}ds$$

więc jest też:

$$\left|\frac{du}{dN}\right| < \frac{S}{2\pi}\int\limits_{(C)}\left|\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\right|ds$$

Z nierówności 7 (str 6) i z naszego założenia o położeniu punktu (xy) otrzymamy

$$\left|\frac{df}{d\varrho}\right| < \frac{\pi}{2}\,m\,e^{-ad} + \frac{e^{-ad}}{d} < \frac{\pi m}{a^2d^2} + \frac{1}{ad^2} < \frac{\pi}{d^2}\left(\frac{m}{a^2} + \frac{1}{a}\right)$$

czyli

$$\left|\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\right| < \frac{2\pi m}{a^2d^2}$$

bo jest

$$\frac{m}{a} > 1$$

Przeto mamy:

$$(31) \qquad \left|\frac{du}{dN}\right| < \frac{Sm}{a^2d^2}\Lambda$$

gdzie Λ oznacza długość łuku krzywej C.

Załóżmy, że punkt (x, y) jest dość blisko krzywej C tak, iż istnieje jeden punkt O na krzywej C jemu najbliższy; normalną wewnętrzną tego punktu O obieramy jako oś x, styczną jako oś y; punkt (x, y) wobec tego leżeć będzie na osi x i jego rzędna równa się zeru. Przy takim układzie jest normal-

na pochodną funkcyi $u(xy)$ pochodną $\frac{\partial u}{\partial x}$, na którą otrzymujemy równość

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_C \sigma(x'y')\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\frac{x-x'}{\varrho}ds$$

a oznaczając przez C_0 obustronne sąsiedztwo na krzywej C punktu O takie, jak już je kilkakrotnie obieraliśmy, przez C_1 łuk pozostały z krzywej C, otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{x-x'}{\varrho}ds + \frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{x-x'}{\varrho}ds$$

$$= \frac{x}{2\pi}\int_{C_0}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{1}{\varrho}ds - \frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{x'}{\varrho}ds + \frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{x-x'}{\varrho}ds$$

Dla łuku C_1 istnieje dolna granica na liczbę ϱ, różna od zera; oznaczając przez d otrzymamy drogą analogiczną do tej, która nas doprowadziła ~~do~~ nierówności (31):

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{x-x'}{\varrho}ds\right| < \frac{Sm}{a^2d^2}\cdot\Lambda$$

Wskutek nierówności 7 (str 6) otrzymujemy:

$$\left|\frac{x}{2\pi}\int_{C_0}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{1}{\varrho}ds\right| < \frac{|x|S}{2\pi}\int_{C_0}\left\{\frac{\pi}{2}m\frac{e^{-a\varrho}}{\varrho} + \frac{e^{-a\varrho}}{\varrho^2}\right\}ds$$

Ponieważ jest

$$ds = \frac{dy'}{\cos\gamma}$$

zaś na dostawę $\cos\gamma$ istnieje wzdłuż łuku C_0 nierówność 11 (str 10) więc jest

$$|x|\int_{C_0}\frac{e^{-a\varrho}}{\varrho}ds < \int_{C_0}e^{-a\varrho}ds < 4\int_0^\infty e^{-ay'}dy' = \frac{4}{a}$$

Nadto jest

$$|x|\int_{C_0}\frac{e^{-a\varrho}}{\varrho^2}ds < |x|\int_{C_0}\frac{ds}{\varrho^2}$$

ale już wiemy z rozumowań zawartych na stronie 14, że istnieje stała dodatnia D', jako górna granica ~~całki~~ iloczynu

$$|x|\cdot\int_{C_0}\frac{ds}{\varrho^2}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\left|\frac{x}{2\pi}\int_{C_0}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{1}{\varrho}ds\right| < \frac{S}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{a} + D'\right) < \frac{D''mS}{a}$$

gdzie D'' jest pewna stała dodatnia zależna od krzywej C jedynie i związana ze stałą D' równością $D'' = \frac{1}{2\pi}(2\pi + D')$

Wskutek nierówności 12 (str 10) otrzymujemy dalej:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{x'}{\varrho}ds\right| < \frac{g\delta}{\pi}\int_{C_0}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2\left[\frac{\pi}{2}m\varrho+1\right]e^{-a\varrho}ds$$

ale można znaleźć stałą dodatnią E' taką, że jest $\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 < E'$

przeto mamy

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{x'}{\varrho}ds\right| < \frac{g\delta E'}{\pi}\int_{C_0}\left(\frac{\pi}{2}m\varrho+1\right)e^{-a\varrho}ds$$

ale jest znowu:

$$\int_{C_0} e^{-a\varrho}\varrho\, ds < 8\int_0^\infty e^{-ay'}y'\,dy' = \frac{8}{a^2}$$

$$\int_{C_0} e^{-a\varrho}ds < 4\int_0^\infty e^{-ay'}dy' = \frac{4}{a}$$

i wobec tego jest:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\frac{x'}{\varrho}ds\right| < \frac{g\delta E'}{\pi}\left(\frac{4\pi m}{a^2}+\frac{4}{a}\right) < \frac{4g\delta E' m}{a^2}$$

Możemy więc ostatecznie powiedzieć, że w każdym razie, ~~czy~~ gdy punkt (xy) leży dowolnie blisko krzywej C, czy nie, istnieją dwie stałe dodatnie D i E, zależne jedynie od krzywej C i takie, że jest:

$$32.\quad \begin{cases} \left|D_{ni}(u)\right| < \left(\frac{Dm}{a^2}+\frac{Em}{a}\right)\delta \\ \left|D_{ne}(u)\right| < \left(\frac{Dm}{a^2}+\frac{Em}{a}\right)\delta \end{cases}$$

§14. Wyprowadzimy teraz nierówność na funkcyę $v(xy)$. Jeżeli założymy najpierw, że punkt xy jest tak położony, iż dla niego istnieje ~~górna~~ dolna granica, różna od zera na liczbę ϱ i ~~górną~~ granicę tę oznaczymy przez d, to rachunki, służące do wyprowadzenia szukanej nierówności będą identyczne z rachunkami, które nas doprowadziły do nierówności 31 (str 27), a więc jest w tym wypadku:

$$|v(xy)| < \frac{\delta m}{a^2 d^2}\cdot A$$

Jeżeli zaś punkt (xy) dość blisko krzywej C leży, postępujemy z układem osi, jak w poprzednim paragrafie i zupełnie podobnie dzielimy łuk na części C_0 i C_1 i na łuku C_0 kładziemy:

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\varrho}\cos\nu - \frac{x'\cos\nu + y'\sin\nu}{\varrho}$$

jeżeli przez $x'y'$ oznaczymy znów współrzędne punktów łuku C_0

Wobec tego otrzymujemy:

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_0} \sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\left\{\frac{x}{\varrho}\cos\gamma - \frac{x'\cos\gamma + y'\sin\gamma}{\varrho}\right\}ds - \frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\sigma(x'y')\frac{df}{d\varrho}\cos\vartheta\, ds$$

Ale wyrażenie $x'\cos\gamma + y'\sin\gamma$ różni się od funkcyi H ze str 22 tylko znakiem i można łatwo okazać, że jest:

$$|H| < 3\varrho\varrho'^2$$

jeżeli uwzględnimy nierówności 12 (str 10) i 20 (str 17). Stąd widzimy, że dalszy rachunek musiałby formalnie wypaść podobnie do rachunku paragrafu poprzedzającego.

Wolno nam tedy powiedzieć: istnieją stałe dodatnie D', E' zależne jedynie od krzywej C i takie, iż jest

(33) $$|v(xy)| < \left(\frac{D'm}{a^2} + \frac{E'm}{a}\right)S$$

§15. Co do zachowania się potencyału warstwy podwójnej, możemy z powodu nierówności 7 (str 6) powtórzyć prawie dosłownie to, co powiedzieliśmy w §8 o potencyale warstw pojedynczych. Oznaczając więc dolną granicę liczby ϱ przez P i przyjmując, że punkt xy oddala się do nieskończoności, otrzymujemy, że:

(34) $$\lim_{P=\infty}\left[P^n \cdot v(xy)\right] = 0$$

gdy n przedstawia jakąkolwiek liczbę całkowitą.

§16. Uważajmy nierówności następujące 14 (str 11), 18 (str 15) 26 (str 20), 32 (str 29) i 33 (str 30): są to nierówności:

(14) $$|u(xy)| < \frac{AS}{a}$$

(18) $$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{BmS}{a^2}$$
$$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{BmS}{a^2}$$

(26) $$\left|v_i - \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{CSm}{a^2}$$
$$\left|v_e - \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{CSm}{a^2}$$

(32) $$|D_{ni}(u)| < \left(\frac{Dm}{a^2} + \frac{Em}{a}\right)S$$
$$|D_{ne}(u)| < \left(\frac{Dm}{a^2} + \frac{Em}{a}\right)S$$

(33) $$|v(xy)| < \left(\frac{D'm}{a^2} + \frac{E'm}{a}\right)S$$

zachodzą tu stałe zależne jedynie od krzywej C; ujednostajnimy je i wyrazimy przez inne stałe charakterystyczne dla krzywej C. Załóżmy w tym celu, że początek współrzędnych leży wewnątrz obszaru D i wykonajmy na krzywej C przekształcenie podobne $x = kx'$, $y = ky'$; wskutek tego krzywa C przejdzie na nową krzywą C'. Stała jakakolwiek np. A zachodząca w wymienionych nierównościach przejdzie na nową stałą A', zależną jedynie od krzywej C' i załóżmy, że istnieje taka liczba p, iż jest

$$A = A' \cdot k^p$$

jeżeli L oznacza największą odległość dwóch punktów krzywej C, zaś L' największą odległość dwóch punktów krzywej C', to, jak wiadomo, jest $L = kL'$ i przeto:

$$\frac{A}{A'} = \left(\frac{L}{L'}\right)^p$$

skąd

$$\frac{A}{L^p} = \frac{A'}{L'^p}$$

czyli ten stosunek ma wartość stałą (oznaczmy ją przez c) dla wszystkich krzywych do siebie podobnych i wskutek tego jest

$$A = c \cdot L^p$$

Spróbujemy, czy wszystkie stałe zależne od krzywej C, zachodzące w wypisanych nierównościach, są tego to kształtu, i zarazem znajdźmy wykładnik p. Zwróćmy się najpierw do nierówności 14 (str. 30). Jeżeli przez ξ, η oznaczymy współrzędne krzywej C, zaś przez $\xi' \eta'$ takie punkty krzywej C', iż jest $\xi = k\xi'$, $\eta = k\eta'$, uważajmy na krzywej C' agens w punkcie ξ', η' o gęstości tej samej, która ma agens rozpostarty na krzywej C w punkcie ξ, η i uważajmy potencyał tej warstwy pojedynczej, rozpostartej wzdłuż krzywej C':

$$u' = \frac{1}{2\pi}\int_{C'} \sigma(\xi,\eta)\, f(\rho', \mu')\, ds'$$

gdzie przez ρ' oznaczyliśmy odległość punktów krzywej C' od punktu, do którego odnosi się potencyał u', liczba μ' gra tę samą rolę, co dotąd liczba μ, nadto ds' oznacza element krzywej C'. Oznaczając przez a' liczbę, w którą przechodzi liczba a, gdy zamiast liczby μ uważamy liczbę μ' t. j.

$$a' = \sqrt{\rho_1'} \sin\frac{\theta'}{2}$$

a przez A' stałą dodatnią, zależną jedynie od krzywej C', mamy:

$$|u'| < \frac{A'S}{a'}$$

Zapytajmy się, jak wyznaczyć liczbę μ', aby potencyał u' różnił się od potencyału u tylko o stały czynnik; wtedy bowiem będzie można znaleźć związek między stałemi A i A'. Otóż jest:

$$f(\varrho\mu) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\, dt \quad ; \quad f(\varrho'\mu') = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu'\sqrt{\rho'^2+t'^2}}}{\sqrt{\varrho'^2+t'^2}}\, dt'$$

Jeżeli potencyały u i u' odnoszą się do punktów odpowiadających sobie na mocy przekształcenia podobnego, opisanego powyżej, to jest $\rho = k\varrho'$, przyczem zaznaczamy, że liczbę k obieramy jako liczbę rzeczywistą (i oczywiście różną od zera). Jeżeli położymy $t = t'k$ i nadto $\mu' = k\mu$, to wtedy mamy:

$$f(\varrho\mu) = f(\varrho'\mu')$$

a że jest w punktach sobie odpowiadających $ds = k\,ds'$, więc jest także

$$u' = \frac{1}{2\pi k}\int_C \sigma(\xi\eta) f(\varrho\mu) ds = \frac{u}{k}$$

Ponieważ jest $\mu' = k\mu$, więc musi być $\theta = \theta'$, $\sqrt{p_1'} = k\sqrt{p_1}$, tedy jest

$$\left|\frac{1}{k}u\right| < \frac{A'S}{k\sqrt{p_1}\,\sin\frac{\theta}{2}}$$

a więc wolno położyć $A = A'$ i $p = 0$. Wskutek tego liczba stała A jest jednakowa dla krzywych do siebie podobnych i połóżmy $A = c$. Wobec tego otrzymujemy nierówność

(34) $$|u(xy)| < \frac{cS}{\sqrt{p_1}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}$$

Zwróćmy się teraz do nierówności 18 (str. 30), w których po stronie prawej kładziemy

$$\frac{m}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{p_1}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Jeżeli jak wyżej obierzemy potencyał u', to otrzymamy w każdym razie

$$\left|\left(\frac{du'}{dN'}\right)_i + \frac{1}{2}\sigma_0\right| < \frac{B'S}{\sqrt{\varrho_1'}\,\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\left|\left(\frac{du'}{dN'}\right)_e - \frac{1}{2}\sigma_0\right| < \frac{B'S}{\sqrt{p_1'}\,\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

gdzie N' oznacza normalną do krzywej C'. W punktach sobie odpowiadających mamy z równości powyżej napisanej $u = ku'$ także $\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial u}{\partial y}$, więc stąd wynika, że $\left(\frac{du'}{dN'}\right)_{i,e} = \left(\frac{du^*}{dN^*}\right)_{i,e}$, tedy otrzymujemy:

$$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \frac{1}{2}\sigma_0\right| < \frac{B'S}{k\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \frac{1}{2}\sigma_0\right| < \frac{B'S}{k\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

porównywując te wzory ze wzorami 18 (str. 30) widzimy, że wolno przyjąć $B' = B.k$, wobec czego jest $p = -1$, a z tego wynika, że jest $B = c'.\mathcal{L}^{-1}$, gdzie c' oznacza nową stałą zależną jedynie od rodziny krzywych do siebie podobnych; nazywając przez c większą z liczb c i c' otrzymujemy:

$$(35)\quad \begin{cases} \left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{c.S}{\mathcal{L}\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ \left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{c\,S}{\mathcal{L}\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

Podobne rozumowania wykażą, że będzie także:

$$(36)\quad \left|\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \left(\frac{du}{dN}\right)_e\right\}\right| < \frac{c\,S}{\mathcal{L}\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$(37)\quad \begin{cases} \left|v_i - \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{c\,S}{\mathcal{L}\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ \left|v_e + \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{c\,S}{\mathcal{L}\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

$$(38)\quad \left|\frac{1}{2}(v_i + v_e)\right| < \frac{c\,S}{\mathcal{L}\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$(39)\quad \begin{cases} \left|\mathcal{D}_{ni}(u)\right| < \left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\mathcal{L}\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) c.S \\ \left|\mathcal{D}_{ne}(u)\right| < \left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\mathcal{L}\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) c\,S \end{cases}$$

$$(40)\quad |v| < \left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\mathcal{L}\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) c\,S$$

II. Dalsze zagadnienia pomocnicze.

§17. Uważajmy szereg:

$$(1)\quad F(x,y,\lambda) = \sum_0^\infty F_k(xy).\lambda^k$$

gdzie wyrazy są funkcyami ~~ciągłemi~~ zmiennych (xy), pomnożonemi przez pewną potęgę liczby zespolonej λ. Jeżeli szereg ten jest zbieżny, to przedstawia funkcyę zależną od trzech zmiennych x, y, λ.

Promień zbieżności szeregu tego względem λ zależy oczywiście od przyjętych wartości na zmienne (xy).
Załóżmy, że szereg 1 (str. 33) jest takim, iż istnieje liczba dodatnia R największa taka, iż, gdy tylko zmienne xy są zawarte w pewnym obszarze Δ i gdy jest $|\lambda| < R$, szereg 1 (str. 33) jest jednostajnie zbieżny względem zmiennych (xy) obszaru Δ. Liczbę R nazywać będziemy promieniem jednostajnej zbieżności szeregu 1. Że ta okoliczność może się nadarzyć, przekonamy się w dalszym ciągu kilkakrotnie.
Załóżmy dalej, że, gdy w pewien sposób zmienne x, y obszaru Δ zdążają do wartości $x_0 y_0$ obszaru Δ, funkcye $\mathfrak{F}_k(xy)$ dążą do określonych granic A_k, że liczba λ_1 jest taką, iż jest $|\lambda_1| < R$. Wykażemy najpierw, że szereg

$$\sum_0^\infty A_k \lambda_1^k$$

jest zbieżny.
Na mocy naszego założenia istnieje do każdej liczby dodatniej ε taka liczba całkowita i dodatnia N, iż ~~gdy~~ jest

$$(2) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathfrak{F}_k(xy) \lambda_1^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla wszystkich wartości $n \geq N$ i dla wszystkich liczb (x, y) obszaru Δ. Nadto, jeżeli liczby $x_1 y_1$ obszaru należą do tych wartości na xy obszaru Δ, które zmienne xy przyjmować mogą przy przejściu do granicy $x_0 y_0$, to można wyznaczyć taką dodatnią liczbę $\delta_{n,p}$ zależną od liczb n, p, iż gdy tylko jest

$$|x_1 - x_0| < \delta_{n,p} \quad , \quad |y_1 - y_0| < \delta_{n,p}$$

to jest

$$(3) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \lambda_1^k - \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathfrak{F}_k(x_1 y_1) \lambda_1^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jeżeli w nierówności (2) położymy

$$(4) \qquad x = x_1 , \quad y = y_1$$

co wolno uczynić, to z nierówności 2 i 3 i z równości (4) wyniknie, że ~~jest~~ do każdej dowolnej dodatniej liczby ε istnieje taka liczba dodatnia i całkowita N, iż jest:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \lambda_1^k \right| < \varepsilon$$

dla wszystkich wartości $n \geq N$, a z tego wprost wynika nasze twierdzenie.

Wykażemy dalej, że wśród naszych (założeń) funkcya $F(xy\lambda_1)$ przy pewnych sposobie przejścia do granicy $x_0 y_0$ ma granicę i że jest

$$\lim_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} F(xy\lambda_1) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda_1^k$$

Oznaczmy przez $x_1 y_1$ liczbę tę samą, co przed chwilą i wyrażajmy różnicę

$$F(x_1 y_1 \lambda_1) - \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda_1^k = \sum_{0}^{m} \{ \mathfrak{F}_k(x_1 y_1) - A_k \} \lambda_1^k + \sum_{m}^{\infty} \mathfrak{F}_k(x_1 y_1)\lambda_1^k - \sum_{m}^{\infty} A_k \lambda_1^k$$

Otóż do każdej dowolnej dodatniej liczby ε można znaleść taką wartość na liczbę m, iż jest:

$$\left| \sum_{m}^{\infty} \mathfrak{F}_k(x_1 y_1)\lambda_1^k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

przy jakichkolwiek wartościach $x_1 y_1$ w obszarze Δ, dalej, że zarazem jest

$$\left| \sum_{m}^{\infty} A_k \lambda_1^k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Obrawszy liczbę m tak, aby obie nierówności były spełnione można znaleść taką dodatnią liczbę δ ~~znaleść~~, iż, gdy tylko jest $|x_1 - x_0| < \delta$, $|y_1 - y_0| < \delta$

jest także

$$\left| \sum_{0}^{m} \{ \mathfrak{F}_k(x_1 y_1) - A_k \} \lambda_1^k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Stąd wynika, że do każdej dodatniej liczby ε można znaleść dodatnią liczbę δ tak, iż, gdy tylko jest

$$|x_1 - x_0| < \delta \quad , |y_1 - y_0| < \delta$$

jest także

$$\left| F(x_1 y_1 \lambda_1) - \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda_1^k \right| < \varepsilon$$

co potwierdza nasze twierdzenie w zupełności.

§18. Uważajmy znów szereg 1 (str 33) i niech R jest promieniem jednostajnej zbieżności szeregu 1.

Łatwo udowodnić, że, o ile zmienne x, y pozostają w obszarze Δ zaś liczba λ spełnia nierówność $|\lambda| < R$ i funkcye $\mathfrak{F}_k(xy)$ są funkcyami ciągłemi w obszarze Δ', który ~~jest~~ nie przekracza obszaru Δ, to funkcya $F(xy\lambda)$ jest funkcyą ciągłą względem zmiennych x, y, λ w każdym punkcie xy, który leży wewnątrz obszaru Δ' i dla każdej wartości λ, która spełnia nierówność $|\lambda| < R$.

Uważajmy znów szereg 1 (str 33) i niech R jest jego promieniem jednostajnej zbieżności. Niech każda funkcya $\mathfrak{F}_k(xy)$ ma pierwsze pochodną ciągłą i skończoną w pewnym obszarze Δ', który nie prze-

kracza obszaru Δ i niech w obszarze Δ'', który nie jest większy od obszaru Δ' szereg

$$\sum_0^\infty \partial F_k(xy) \cdot \lambda^k$$

jest jednostajnie zbieżny, o ile jest $|\lambda| < R_1$, gdzie R_1 jest liczbą dodatnią, a $\partial F_k(xy)$ przedstawia jedną z pochodnych pierwszych funkcyi $F_k(xy)$. Powiadam, że funkcya $F(x, y, \lambda)$ ma każdą pochodną pierwszą we wszystkich punktach dowolnych wewnątrz obszaru Δ'' i gdy liczba λ czyni zadość nierównościom $|\lambda| < R$, $|\lambda| < R_1$.

Jakoż niech $x_1 y_1$ przedstawiają punkt wewnątrz obszaru Δ'' i niech liczba λ_1 będzie taką, iż jest równocześnie:

$$|\lambda_1| < R, \quad |\lambda_1| < R_1$$

i utwórzmy na przykład równości widoczną:

$$\sum_0^\infty \frac{F_k(x_1+h, y_1) - F_k(x_1 y_1)}{h} \cdot \lambda_1^k - \sum_0^m \frac{\partial F_k(x_1 y_1)}{\partial x_1} \lambda_1^k =$$

$$= \sum_0^m \left\{ \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right)_{x_1+\theta_k h, y_1} - \frac{\partial F_k(x_1 y_1)}{\partial x_1} \right\} \lambda_1^k +$$

$$+ \sum_m^\infty \left(\frac{\partial F(xy)}{\partial x}\right)_{x_1+\theta_k h, y_1} \cdot \lambda_1^k - \sum_m^\infty \frac{\partial F_k(x_1 y_1)}{\partial x_1} \cdot \lambda_1^k$$

Otóż do każdej dowolnie małej dodatniej liczby ε można zawsze znaleść taką liczbę m całkowitą i dodatnią, iż jest

$$\left| \sum_m^\infty \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_1+\theta_k h, y_1} \lambda_1^k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \sum_m^\infty \frac{\partial F_k(x_1 y_1)}{\partial x_1} \lambda_1^k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

przyczem zauważyć trzeba, iż tak dobrano liczbę h różną od zera iż punkty $x_1 + \theta_k h$, y_1 padają w obszar Δ''.

Mając obraną taką liczbę m mogę znaleść taką dodatnią liczbę δ, iż gdy jest $|h| < \delta$, to z powodu ciągłości pochodnych jest

$$\left| \sum_0^m \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_1+\theta_k h, y_1} - \frac{\partial F(x_1 y_1)}{\partial x_1} \right\} \lambda_1^k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

a z tych nierówności wynika, że do każdej dodatniej liczby ε można znaleść dodatnią liczbę δ taką, iż, gdy jest $|h| < \delta$, to jest także

$$\left| \frac{F(x_1+h, y_1 \lambda_1) - F(x_1 y_1 \lambda_1)}{h} - \sum_0^\infty \frac{\partial F_k(x_1 y_1)}{\partial x_1} \right| < \varepsilon$$

co uzasadnia nasze twierdzenie.

§19. Rozwiążmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu potencyału $u(xy)$ warstwy pojedynczej, zależnego od stałej λ tak, by zachodziła równość

$$(4) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left\{\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right\} + 2\tau$$

gdzie τ oznacza daną funkcyę ciągłą punktu krzywej C.
Potencyał ten, o ile istnieje, będzie, jak wszelkie, przez nas rozważane potencyały warstw pojedynczych, czynił zadość równaniu

$$(5) \qquad \Delta u + \xi u = 0$$

wewnątrz obszaru D i zewnątrz krzywej C wskutek równości 8 (str. 7). Otóż wyobraźmy sobie, że dana jest liczba ξ, a tem samem liczba μ, od której więc zależy potencyał i którą nazywać będziemy liczbą charakterystyczną potencyału warstwy pojedynczej. Zagadnienie określone równością 4 zwać będziemy problemem Robina.
Kładąc

$$(6) \qquad u = \sum_0^\infty u_k \lambda^k$$

$$(7) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_{e,i} = \sum_0^\infty \left(\frac{du_k}{dN}\right)_{e,i} \cdot \lambda^k$$

otrzymujemy z równości 4 równania:

$$(8) \qquad \begin{cases} \left(\frac{du_0}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i = 2\tau \\ \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i \qquad (k=1,2,3,.) \end{cases}$$

Na odwrót przyjmując równości 8 za definicyę potencyałów warstw pojedynczych u_k, zobaczmy czy szereg 6 będzie zbieżny, czy będzie potencyałem warstwy pojedynczej, czy prawdziwy będzie związek 7 i czy funkcya u określona szeregiem 6 spełnia warunek 4.
Kładąc

$$(9) \qquad u_k = \frac{1}{2\pi}\int \sigma_k f(\varsigma,\mu)\,ds \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

na mocy równości 17 (str. 15) otrzymujemy na gęstości σ_k określenia:

$$(10) \qquad \begin{cases} \sigma_0 = 2\tau \\ \sigma_k = \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i \qquad (k=1,2,\dots) \end{cases}$$

Metodą indukcyi zupełnej przekonać się łatwo, że równości 10 zupełnie określają funkcye $\sigma_0\, \sigma_1\, \sigma_2, \dots$
Oznaczmy przez T górną granicę modułu funkcyi τ wzdłuż krzywej

C, z nierówności 36 (str 33) otrzymujemy:

$$\left|\left(\frac{du_0}{dN}\right)_i+\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e\right| < \frac{4cT}{\mathfrak{L}\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

czyli

$$|\sigma_1| < \frac{4cT}{\mathfrak{L}\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

a stąd dalej

$$\left|\left(\frac{du_1}{dN}\right)_e+\left(\frac{du_1}{dN}\right)_i\right| < \frac{8c^2T}{\mathfrak{L}^2\rho_1\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

a stąd przy pomocy metody indukcyi zupełnej otrzymujemy

(11)
$$\left|\left(\frac{du_k}{dN}\right)_e+\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i\right| < \frac{2^{k+2}c^{k+1}T}{\mathfrak{L}^{k+1}\cdot\rho_1^{\frac{k+1}{2}}\sin^{2(k+1)}\frac{\theta}{2}} \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

czyli z równości 10 (str 37) mamy

(12)
$$|\sigma_0| < 2T$$

$$|\sigma_k| < \frac{2^{k+1}c^kT}{\mathfrak{L}^k\rho_1^{\frac{k}{2}}\sin^{2k}\frac{\theta}{2}} \qquad (k=1,2,\dots)$$

a stąd i z nierówności 34 (str 32) wynika:

(13)
$$|u_k| < \frac{2^{k+1}c^{k+1}T}{\mathfrak{L}^k\rho_1^{\frac{k+1}{2}}\sin^{2(k+1)}\frac{\theta}{2}} \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

Jeżeli więc utworzymy szereg 6 (str 37), to szereg ten będzie jednostajnie zbieżny dla takich liczb λ napewne, które spełniają nierówność

$$\left|\frac{2c}{\mathfrak{L}\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot\lambda\right| < 1$$

Załóżmy więc, że obraliśmy liczbę ξ tak, że jest

(14)
$$\frac{c}{\mathfrak{L}\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} < \frac{1}{2}$$

to szereg 6 będzie ~~zbieżny~~ miał promień jednostajnej zbieżności R, większy od jedności i wolno będzie położyć zamiast +1 lub −1 na liczbę λ.

Nadto, gdy jest $|\lambda| < R$, będzie ~~tm samym promień~~ jednostajnie zbieżny ~~na~~ szereg $\sum_0^\infty \sigma_k\lambda^k$ i jeżeli przez σ oznaczymy funkcyę, którą określa, to będzie funkcya u określona przez szereg 6 (str 37):

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_C \sigma f(\varsigma\mu)\, ds$$

a więc jest potencyałem warstwy pojedynczej.
Ze wzorów 39 (str 33) i 12 (str 38) otrzymujemy nierówności

$$15 \begin{cases} \left|\mathfrak{D}_{ni}(u_k)\right| < \dfrac{2^{k+1} c^k \cdot T}{\mathfrak{L}^k \rho_1^{\frac{k}{2}} \sin^{2k}\frac{\theta}{2}} \cdot A \\ \left|\mathfrak{D}_{ne}(u_k)\right| < \dfrac{2^{k+1} c^k T}{\mathfrak{L}^k \rho_1^{\frac{k}{2}} \sin^{2k}\frac{\theta}{2}} \cdot A \end{cases}$$

gdzie dla krótkości położyliśmy:

$$A = c.\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\mathfrak{L}\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

Szeregi

$$\sum_0^\infty \mathfrak{D}_{ni}(u_k).\lambda^k$$

$$\sum_0^\infty \mathfrak{D}_{ne}(u_k)\lambda^k$$

~~mają więc jednakowe promienie~~ są napewno jednostajnie zbieżne, ~~że~~ gdy jest nim szereg 6 (str 37)
Na mocy §18 (str 35) istnieją pochodne $\mathfrak{D}_{ni}(u)$, $\mathfrak{D}_{ne}(u)$, o ile punkt (xy) jest gdziekolwiek ~~poza~~ na krzywej $\mathfrak{C}$, zaś liczba λ ~~nie~~ ~~jest~~ jest mniejsza od promienia zbieżności. Na mocy zaś §17 (str 35) istnieją w tych samych warunkach co do λ granice $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$, $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$, gdy punkt xy zdąża do krzywej $\mathfrak{C}$ i określają się przez wzory 7 (str 37)
Z równości 8 (str 37) wynika, że funkcya u czyni zadość warunkowi 4 (str 37)
jeżeli liczba λ jest mniejsza od swego promienia zbieżności.
Zauważyliśmy, że przy warunku 14 (str 38) promień zbieżności szeregu 6 (str 37) jest większy od jedności, wolno więc położyć $\lambda = \pm 1$; kładąc więc $\lambda = \pm 1$ w szeregu 6 (str 37) otrzymujemy szeregi sprawdzające równości, które otrzymamy z równości 4 (str 37), kładąc $\lambda = \pm 1$ t.j. sprawdzające równości

$$\left(\frac{du(+1)}{dN}\right)_i = -\tau$$

$$\left(\frac{du(-1)}{dN}\right)_e = \tau$$

Dochodzimy więc do wniosku: jeżeli liczba ξ spełnia nierówność 14 (str 38), to istnieje funkcya, sprawdzająca wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$ lub zewnątrz krzywej $\mathfrak{C}$ równanie

$$\Delta u + \xi u = 0$$

a na krzywej $\mathfrak{C}$ warunek: ✗

(16) $\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \tau$

albo warunek

(17) $\left(\frac{du}{dN}\right)_i = \tau$

gdzie τ oznacza funkcyę ciągłą punktu krzywej C.

§20. Wyrażajmy ilość funkcyi czyniących zadość ~~w~~ równości 5 (str. 37) poza krzywą C i równości 17 wzdłuż krzywej C. Ponieważ w jednym z późniejszych rozdziałów będziemy w możności zagadnienie to rozwiązać zadowalniająco, więc ograniczmy się o tyle, że zbadajmy, ile może być potencyałów warstw pojedyńczych, któreby sprawdzały wzdłuż krzywej C warunek 17. Oznaczmy przez u jeden z takich potencyałów, przez σ jego gęstość, przez S ~~wart~~ dokładną górną granicę modułu funkcyi σ. Z pierwszej nierówności 35 (str. 38) i równości 17 (str. 40) otrzymujemy

$$\tau + \frac{1}{2}\sigma = \frac{c\, S}{2\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \vartheta$$

gdzie liczba ϑ czyni zadość nierówności

$$|\vartheta| < 1$$

Funkcya $|\sigma|$ jako funkcya ciągła wzdłuż krzywej C przyjmuje co najmniej raz w pewnym punkcie P krzywej C swoje maximum czyli jest

$$\sigma_P = S.\sigma'$$

gdzie jest

$$|\sigma'| = 1$$

Oznaczywszy przez ϑ_P wartość liczby ϑ w punkcie P mamy:

$$\tau_P + \frac{1}{2} S.\sigma' = \frac{c\, S}{2\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \vartheta_P$$

przez τ_P oznaczyliśmy wartość funkcyi τ w punkcie P. Załóżmy, że liczbę ξ wybraliśmy tak, iż czyni zadość warunkowi:

(18) $$\frac{c}{2\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \leq \frac{1}{4}$$

wtedy otrzymujemy

$$S.\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \leq S.\left|\frac{1}{2}\sigma' - \frac{c\,\vartheta_P}{2\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right| = |\tau_P| \leq T$$

jeżeli przez T oznaczymy górną granicę funkcyi $|\tau|$ na krzywej C. Wobec tego jest

(19) $$S \leq 4T$$

(20) $$|\sigma| \leq 4T$$

Załóżmy teraz, że zagadnienie, określone równością 17 (str. 40) ma dwa rozwiązania u i u' i że zachodzi warunek 18. W takim razie

jest: $$\left(\frac{d(u-u')}{dN}\right)_i = 0$$

a więc dlatego zagadnienia jest $\tau \equiv 0$ wzdłuż krzywej C i stąd jest $T=0$; różnica $u-u'$, jako różnica dwóch potencyałów warstw pojedynczych rozpostartych wzdłuż krzywej C, będzie również potencyałem warstwy pojedynczej o gęstości σ; wskutek równości 20 (str 40) i warunku $T=0$ otrzymuję w każdym punkcie krzywej C równość $\sigma=0$ czyli jest $u=u'$, co było do wykazania.

Z równości 34 (str 32) i 19 (str 40) otrzymuję na potencyał u przy warunku 18 (str 40):

(21) $$|u| < \frac{4cT}{\sqrt{p_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

a warunku 39 (str 33):

(22) $$\left|D_{ni}(u)\right| < \left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) \cdot 4cT$$

To samo można mutatis mutandis powtórzyć o zagadnieniu 16 (str 40.)

§21. Wyszukajmy teraz potencyał warstwy podwójnej, rozpostartej wzdłuż krzywej C, czyniący, jak łatwo okazać, zadość równaniu

(23) $$\Delta v + \xi v = 0$$

poza krzywą C, gdzie przez v oznaczyliśmy ten potencyał który niech wzdłuż krzywej C czyni zadość warunkowi

(24) $$v_i - v_e = \lambda(v_i + v_e) + 2\tau$$

gdzie λ jest daną liczbą zespoloną, zaś τ daną funkcyą ciągłą punktu krzywej C.

Załóżmy, że wolno położyć

(25) $$v = \sum_0^\infty v_k \cdot \lambda^k$$

gdzie v_k oznaczają potencyały warstw podwójnych, spełniających poza krzywą C równanie 23. Z warunku 24 otrzymamy równości:

(26) $$\begin{cases} v_{0i} - v_{0e} = 2\tau \\ v_{ki} - v_{ke} = v_{k-1,i} + v_{k-1,e} \end{cases} \quad (k=1,2,\ldots)$$

Jeżeli położymy

(27) $$v_k = -\frac{1}{2\pi}\int \sigma_k \frac{df(\xi\rho)}{d\rho}\cos\vartheta\, ds \quad (k=0,1,2..)$$

gdzie liczby ρ i ϑ mają tosamo znaczenie, co we wzorze 5 (str 5), to na mocy równości 25 (str 20) otrzymamy:

(28) $$\begin{cases} \sigma_0 = 2\tau \\ \sigma_k = v_{k-1,i} + v_{k-1,e} \end{cases} \quad (k=1,2,\ldots)$$

wzory te pozwolą zupełnie określić funkcye σ_k, a przez to potencyały v_k.

Przyjmując w ten sposób funkcye v_k zbadajmy, czy szereg 25 jest

zbieżny i jeżeli przez v, oznaczymy funkcyę, którą definiuje, czy istnieją granice v_i i v_e i czynią zadość równości 24 (str. 41). Z równości 28 (str. 41) i 38 (str. 33) otrzymujemy związki:

$$(29)\quad \begin{cases} |\sigma_0| \leq 2T \\ |\sigma_k| \leq \dfrac{2^{k+1} c^k T}{\mathcal{L}^k \rho_1^{\frac{k}{2}} \sin^{2k}\frac{\theta}{2}} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

gdzie T oznacza górną granicę funkcyi $|z|$ wzdłuż krzywej C. Ponieważ wzory 28 są formalnie identyczne ze wzorami 12 (str. 38) więc pod warunkiem 14 (str. 38) istnieje promień jednostajnej zbieżności R dla szeregu

$$(30)\quad \sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \lambda^k \quad ; \quad R > 1$$

i jeżeli przez v oznaczymy funkcyę:

$$(31)\quad v = -\frac{1}{2\pi} \int_C \sigma \frac{d f(\varsigma r)}{d\varsigma} \cos\vartheta \, ds$$

to, o ile jest

$$(32)\quad |\lambda| < R$$

jest także

$$(33)\quad v = \sum_0^{\infty} v_k \lambda^k$$

i jest szeregiem zbieżnym. Na mocy równości 29 (str. 42) i 40 (str. 33) otrzymujemy na całej płaszczyźnie (x, y):

$$|v_k| < \frac{2^{k+1} c^k T}{\mathcal{L}^k \rho_1^{\frac{k}{2}} \sin^{2k}\frac{\theta}{2}} \cdot A$$

gdzie położyliśmy

$$A = c\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\mathcal{L}\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

Warunek 14 (str. 38) i 32 (str. 42) czynią szereg 33 jednostajnie zbieżnym na całej płaszczyźnie, przeto istnieją granice v_i, v_e na mocy §17 (str. 33) i jest

$$v_i = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,i} \lambda^k \;, \quad v_e = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,e} \lambda^k$$

i jak łatwo przekonać funkcya v spełnia równość 24 (str. 41). Przyjmując związek 14 (str. 38) okazaliśmy, że liczba R jest większa od jedności i wolno tedy położyć w równości 24 (str. 41) i w szeregu 33 (str. 42) wartości $\lambda = \pm 1$ czyli innemi słowy: pod warunkiem 14 (str. 38) istnieją potencyały podwójnych warstw, rozpostartych wzdłuż krzywej C i spełniających wzdłuż niej jedną z następujących warunków:

$$(34)\quad v_i = \tau$$

(35) $v_e = \tau$

gdzie τ oznacza daną funkcyę ciągłą punktu ~~[illegible]~~ krzywej C.

§22. Odkładając rozwiązanie zagadnienia, polegającego na wyznaczeniu ilości funkcyi spełniających poza krzywą C równanie 23 (str 41), wzdłuż krzywej C jedno z równań 34 (str 42) lub 35 (str 43) do jednego z późniejszych rozdziałów, spytajmy ile istnieje potencyałów warstw podwójnych spełniających jedno z równań 34 (str 42) lub 35 (str 43) przy warunku 14 (str 38). Jeżeli przez v oznaczymy jeden taki potencyał, przez σ jego gęstość, przez S górną dokładną granicę modułu $|\sigma|$, to z nierówności 34 (str 42) i pierwszej z nierówności 37 (str 33) otrzymujemy

$$\tau - \frac{1}{2}\sigma = \frac{c\,S}{2\sqrt{p}\,\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \vartheta$$

gdzie liczba ϑ spełnia nierówność:

$$|\vartheta| < 1$$

Przeto podobnem rozumowaniem do rozumowania strony 40 otrzymujemy pod warunkiem 18 (str 40) ~~związki~~:

$$(36) \quad \begin{cases} |\sigma| \leq 4T \\ |S| \leq 4T \end{cases}$$

gdzie T oznacza górną granicę funkcyi $|\tau|$ wzdłuż krzywej C. Na mocy nierówności 40 (str 33) otrzymujemy:

$$(37) \qquad |v| < 4\left(\frac{c}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{c}{2\sqrt{p}\,\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)T \leq 4\left(\frac{c}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{4}\right)T$$

jeżelibyśmy uwzględnili związek 18 (str 40).

Jeżeli założymy, że ~~[illegible]~~ potencyały warstw podwójnych v i v' spełniają (przy nierówności 18 (str 40)) równości 34 (str 42) to różnica $v - v'$ będzie potencyałem warstwy podwójnej i będzie spełniała warunek

$$(v - v')_i = 0$$

wzdłuż krzywej C. ~~Jeżeli~~ W tym wypadku jest $\tau \equiv 0$ i $T = 0$ i jeżeli przez σ oznaczymy gęstość potencyału, którym jest różnica $v - v'$, to na mocy pierwszej z nierówności 36 (str 43) wnioskujemy, że jest $\sigma = 0$ czyli że jest $v = v'$ t. zn. przy warunku 18 (str 40) istnieje tylko jeden potencyał warstwy podwójnej, sprawdzający równanie 34 (str 42) wzdłuż krzywej C.

Analogiczną rzecz można powiedzieć dla równości 35 (str 43).

§23. Uważajmy teraz zagadnienie następujące: wyznaczmy taki potencyał warstwy pojedynczej u, rozpostartej wzdłuż krzywej C, żeby wzdłuż krzywej C była spełniona równość:

$$(38) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda h u + \tau$$

gdzie h i τ oznaczają pewne dane funkcye ciągłe punktu krzywej C, zaś λ jest danym parametrem.

Niech jest

$$(39) \qquad u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k$$

gdzie u_k są potencyałami warstw pojedynczych, niech nadto jest

$$(40) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \cdot \lambda^k$$

wtedy na funkcye u_k otrzymujemy warunki:

$$(41) \qquad \frac{du_0}{dN} = \tau \quad ; \quad \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = h u_{k-1} \qquad (k=1,2,\dots)$$

które mają być spełnione wzdłuż krzywej C. Jeżeli założymy, że parametr ξ spełnia nierówność 18 (str. 40), to ~~...~~ równości 41 ~~...~~ pozwolą wyznaczyć nam potencyały u_k i to w jeden tylko sposób.

Ponieważ udowodniliśmy w §6 (str. 11), że potencyał warstwy pojedynczej jest funkcyą ciągłą w całej płaszczyźnie a nadto w §8 (str. 16), że w nieskończoności jest zerem, więc obierzmy środek współrzędnych za środek koła o tak wielkim promieniu, by zewnątrz koła był potencyał co do modułu mniejszy od dowolnie małej liczby ε [correction: "co do modułu" and "liczby" inserted above the line] 1 co do modułu. Na kole i wewnątrz koła jest funkcyą ciągłą i ma moduł ograniczony; z tego wnioskujemy, że potencyał warstwy pojedynczej jest na całej płaszczyźnie co do modułu ograniczony; (to samo odnosi się do potencyałów warstw podwójnych mutatis mutandis).

Ponieważ u_k oznaczają potencyały warstw pojedynczych, więc istnieją górne granice ich modułów i oznaczmy je przez M_k. Z nierówności 21 (str. 41) i z równości 41 (str. 44) otrzymujemy:

$$(42) \qquad M_0 < \frac{4cT}{\sqrt{p_1} \sin\frac{\theta}{2}} \quad ; \quad M_k < \frac{4c H M_{k-1}}{\sqrt{p_1} \sin\frac{\theta}{2}} \qquad (k=1,2,\dots)$$

jeżeli przez T oznaczymy górną granicę funkcyi $|\tau|$ wzdłuż krzywej C, zaś przez H górną granicę funkcyi $|h|$ wzdłuż krzywej C. Z nierówności 42 otrzymujemy nierówność

$$(43) \qquad M_k < \left(\frac{4c}{\sqrt{p_1} \sin\frac{\theta}{2}}\right)^{k+1} \cdot H^k \cdot T \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

a stąd otrzymujemy
$$\left|\sum_0^\infty u_k \lambda^k\right| < \sum_0^\infty \left(\frac{4c}{\sqrt{p_1} \sin\frac{\theta}{2}}\right)^{k+1} \cdot H^k \cdot T \cdot |\lambda|^k$$
a szereg prawej strony będzie zbieżny, jeżeli jest:

(44) $$|\lambda| < \frac{\sqrt{p_1} \sin\frac{\theta}{2}}{4cH}$$

Z nierówności 22 (str 41) i 43 (str 44) otrzymujemy dalej:
$$\left|D_{n_i}(u_k)\right| < 4cA \cdot \left(\frac{4cH}{\sqrt{p_1} \sin\frac{\theta}{2}}\right)^k \cdot T$$
gdzie A ma to samo znaczenie, co we wzorach 15 (str 39).
Pod warunkiem więc 44 jest szereg $\sum_0^\infty D_{n_i}(u_k) \cdot \lambda^k$ jednostajnie zbieżny, więc na mocy § 18 (str 35) przedstawia on pochodną $D_{n_i}(u)$ funkcyi u określonej przez szereg 39 (str 44) jednostajnie zbieżny w całej płaszczyźnie pod warunkiem 44. Na mocy więc § 17 jest szereg
$$\sum_0^\infty \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \lambda^k$$
zbieżny (nawet jednostajnie zbieżny) pod warunkiem 44 i przedstawia granicę pochodnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$. Otrzymujemy więc na mocy równości 41 (str 44) równość:
$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \lambda^k = \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \lambda^k = \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i + \sum_{k=1}^\infty h u_{k-1} \lambda^k =$$
$$= \tau + \lambda h \sum_0^\infty u_k \lambda^k = \tau + \lambda h u$$
pod warunkiem 44. Widzimy więc, że funkcya u spełnia równość 38 (str 44).
Jeżeli teraz obok dawnego warunku na liczbę ξ (18 str 40) przyjmiemy, że liczba ξ jest taka, iż także jest

(45) $$\frac{4cH}{\sqrt{p_1} \sin\frac{\theta}{2}} < 1$$

to warunek 44 pozwalać będzie na to, iżby było $\lambda = 1$.
Przy warunkach 18 (str 40) i 45 (str 45) na liczbę ξ istnieje potencyał warstwy pojedynczej spełniającej wdłuż krzywej C równość:

(46) $$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = hu + \tau$$

Oznaczmy przez σ gęstość takiego potencyału u, przez M i S górne granice modułów funkcyi u i σ.
Na mocy nierówności 19 (str 40) i równości 46 otrzymujemy

(47) $$S \leq 4(HM + T)$$

Na mocy nierówności 21 (str 41) i równości 46 (str 45) otrzymujemy

$$(48) \qquad M < \frac{4c(HM+T)}{\sqrt{p_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

Jeżeli zamiast nierówności 45 (str 45) przyjmie[my] ściślejszą nierówność

$$(49) \qquad \frac{4cH}{\sqrt{p_1}\sin\frac{\theta}{2}} \leq \frac{1}{2}$$

to z nierówności 48 otrzymujemy nierówności:

$$M < \frac{1}{2}M + \frac{4cT}{\sqrt{p_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$M < \frac{8cT}{\sqrt{p_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

a stąd i z nierówności 47 (str 45) otrzymujemy:

$$S \leq 4\left(\frac{8cH}{\sqrt{p_1}\sin\frac{\theta}{2}} + 1\right).T$$

a więc na mocy nierówności 49 tem bardziej będzie

$$(50) \qquad S \leq 8T$$

ponieważ jest

$$|u| \leq M, \quad |\sigma| \leq S$$

więc jest

$$(51) \qquad |u| < \frac{8cT}{\sqrt{p_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$(52) \qquad |\sigma| \leq 8T$$

Gdyby istniały dwa potencyały warstw pojedynczych u i u' spełniających wzdłuż krzywej C równość 46 (str 45), to różnica ich, będąc potencyałem warstwy pojedynczej, spełniać będzie wzdłuż krzywej C równanie:

$$\left(\frac{d(u-u')}{dN}\right)_i = h(u-u')$$

a więc w tym wypadku należy położyć w równaniu 46 (str 45)

$$\tau \equiv 0$$

a stąd jest

$$T = 0$$

jeżeli przez σ oznaczymy gęstość tego potencyału $(u-u')$, to na mocy poprzedniego związku (52) otrzymujemy $\sigma = 0$ czyli $u \equiv u'$.

Przy warunkach 14 (str 40) i 49 (str 46) istnieje jeden i tylko jeden potencyał warstwy pojedynczej spełniający wzdłuż krzywej C równanie 46 (str 45).

Z równania 46 (str 45) otrzymujemy:

$$(53) \qquad \left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i\right| \leq HM + T < \frac{8cHT}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}} + T \leq 2T$$

tedy z nierówności 22 (str 41) i z analogicznej, którą łatwo podać, wynika, że jest:

$$(54) \quad \begin{cases} |\mathfrak{D}_{ni}(u)| < 8cT\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) \\ |\mathfrak{D}_{ne}(u)| < 8cT\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right) \end{cases}$$

§24. Zwróćmy się obecnie do innego pomocniczego zagadnienia. Niech funkcya u, która może być zespoloną ma następujące własności

(A)
1) wewnątrz krzywej C czyni zadość równaniu $\Delta u + \xi u = 0$, gdzie liczba ξ jest liczbą daną.
2) jest ciągłą wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$ i ma ciągłą granicę u_i, jednostajnie osiąganą, gdy punkt zbliża się nieograniczenie do krzywej C będąc wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$
3) ma ciągła granicę, jednostajnie osiąganą, pochodnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$, gdzie N oznacza normalną wewnętrzną do krzywej C.

albo niech

(B)
1) zewnątrz krzywej C czyni zadość równaniu $\Delta u + \xi u = 0$
2) jest ciągłą wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}'$ i ma ciągłą granicę u_e, jednostajnie osiąganą, gdy punkt, będąc wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}'$, zbliża się nieograniczenie do krzywej C.
3) ma ciągłą granicę, jednostajnie osiąganą pochodnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$
4) tak funkcya $|u|$, jak i jej pochodne pierwsze $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ dążą do wartości skończonych, gdy punkt, do którego się odnoszą, dąży w jakikolwiek sposób do nieskończoności.

Warunki te nazywać będziemy warunkami A pierwsze, zaś drugie warunkami B.

Załóżmy, że dwie funkcye u, v czynią zadość warunkom A. Niech $\xi = \alpha + i\beta$, $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$; stąd otrzymujemy

$$\Delta u_1 + \alpha u_1 - \beta u_2 = 0$$
$$\Delta u_2 + \beta u_1 + \alpha u_2 = 0$$
$$\Delta v_1 + \alpha v_1 - \beta v_2 = 0$$
$$\Delta v_2 + \beta v_1 + \alpha v_2 = 0$$

nadto funkcye rzeczywiste u_1, v_1, u_2, v_2 czynią zadość warunkom 2 i 3 z warunków A.

Uważajmy, jak to się zwykle robi, krzywą ~~podobną~~ bliską do krzywej C i leżącą wewnątrz obszaru D; będzie to krzywa C_1, spełniająca te same warunki, co krzywa C; obszar, który zamyka oznaczmy przez D_1. Utwórzmy całkę:

$$J_1 = \int_{D_1} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\} d\tau$$

i te całki J_2, J_3, J_4, w które przechodzi całka J_1, gdy funkcya v_1 przechodzi na funkcyę v_2, względnie funkcya u_1 przechodzi na funkcyę u_2, względnie z obu powodów.

Jeżeli przez N_1 oznaczymy normalną wewnętrzną do C_1, przez ds_1 jej element łuku, to

$$J_1 = -\int_{C_1} u_1 \frac{dv_1}{dN_1} ds_1 - \int_{D_1} u_1 \Delta v_1 \, d\tau = -\int_{C_1} v_1 \frac{du_1}{dN_1} ds_1 - \int_{D_1} v_1 \Delta u_1 \, d\tau$$

~~Jeżeli teraz zważymy warunki 2 i 3 przejdziemy do wypadku, kiedy krzywa C_1 schodzi się z krzywą C, otrzymamy:~~

Stąd jest
$$\int_{(C_1)} \left(u_1 \frac{dv_1}{dN_1} - v_1 \frac{du_1}{dN_1} \right) ds_1 + \int_{(D_1)} (u_1 \Delta v_1 - v_1 \Delta u_1) \, d\tau = 0 \quad \ldots a)$$

podobnie będzie

$$\int_{(C_1)} \left(u_1 \frac{dv_2}{dN_1} - v_2 \frac{du_1}{dN_1} \right) ds_1 + \int_{(D_1)} (u_1 \Delta v_2 - v_2 \Delta u_1) \, d\tau = 0 \quad \ldots b)$$

$$\int_{(C_1)} \left(u_2 \frac{dv_1}{dN_1} - v_1 \frac{du_2}{dN_1} \right) ds_1 + \int_{(D_1)} (u_2 \Delta v_1 - v_1 \Delta u_2) \, d\tau = 0 \quad \ldots c)$$

$$\int_{C_1} \left(u_2 \frac{dv_2}{dN_1} - v_2 \frac{du_2}{dN_1} \right) ds_1 + \int_{(D_1)} (u_2 \Delta v_2 - v_2 \Delta u_2) \, d\tau = 0 \quad \ldots d)$$

Jeżeli równania b) i c) każde pomnożone przez jednostkę urojoną i, równanie d) pomnożone przez liczbę -1 dodamy do równania a), otrzymamy równanie

$$\int_{C_1} \left(u \frac{dv}{dN_1} - v \frac{du}{dN_1} \right) ds_1 + \int_{(D_1)} (u \Delta v - v \Delta u) \, d\tau = 0$$

a że jest $\qquad \Delta u = -\xi u, \qquad \Delta v = -\xi v$

więc ostatecznie otrzymamy równość

$$\int_{C_1} \left(u \frac{dv}{dN_1} - v \frac{du}{dN_1} \right) ds_1 = 0$$

Na mocy własności 2 i 3 z warunków A, odnoszących się i do funkcyi $-v$ i u możemy przejść z krzywą C_i do granicy, aż zejdzie się z krzywą C i otrzymamy

(55) $$\int_C \left\{ u_i \left(\frac{dv}{dN}\right)_i - v_i \left(\frac{du}{dN}\right)_i \right\} ds = 0$$

§25. Uważajmy teraz punkt x, y wewnątrz obszaru D leżący i odległość jego od punktów krzywej C oznaczmy przez ϱ. Oznaczmy przez liczbę μ tęsamą, którą oznaczyliśmy także przez μ w §3 i która zależy od danej liczby ξ; kładąc $\mu = a + bi$, założmy, że jest $a > 0$. Uważajmy funkcyę $f(\varrho, \mu)$, określoną równością 3 (str 5). Funkcya taka, jak wykazaliśmy czynić będzie zadość równaniu

$$\Delta f(\varrho, \mu) + \xi f(\varrho, \mu) = 0$$

w obszarze D, o ile z niego wyłączymy punkt (x, y), otoczywszy go kołem Σ o promieniu δ dość małem, by całe koło Σ padło wewnątrz obszaru D. Ponadto funkcya ta ma własności 2 i 3 z warunków (A), wobec tego stosując do krzywych C i Σ twierdzenie 55, otrzymujemy:

$$\int_C \left\{ u_i \frac{df(\varrho\mu)}{dN} - f(\varrho, \mu)\left(\frac{du}{dN}\right)_i \right\} ds + \int_\Sigma \left(u \frac{df}{dN} - f(\delta\mu)\frac{du}{dN} \right) ds = 0$$

przyczem widać, dlaczego wolno było w całce drugiej w dołu opuścić znaczek „i".

Oznaczmy $\quad J_1 = \int_\Sigma u \frac{df}{dN} ds \;, \quad J_2 = \int_\Sigma f(\varrho\mu) \frac{du}{dN} ds$

także będzie:

$$J_1 = \delta \int_0^{2\pi} u \frac{df}{dN} \cdot d\varphi \;; \quad J_2 = \delta \int_0^{2\pi} f(\delta\mu) \frac{du}{dN} d\varphi$$

Z równań 10 (str 9) otrzymujemy

$$\lim_{\delta=0} \left(\varrho \frac{df}{dN}\right) = \lim_{\delta=0} \left(\delta \frac{df}{d\delta}\right) = -1$$

$$\lim_{\delta=0} \left(\delta f(\delta\mu)\right) = 0$$

więc z powodu ciągłości funkcyi u i jej pochodnych w punkcie xy otrzymujemy:

$$\lim_{\delta=0} J_1 = -2\pi u(xy)$$

$$\lim_{\delta=0} J_2 = 0$$

i ostatecznie równość:

(56) $$u(xy) = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ u_i \frac{df(\varrho\mu)}{dN} - f(\varrho\mu)\left(\frac{du}{dN}\right)_i \right\} ds$$

a oznaczając przez ϑ kąt między kierunkiem normalnej wewnętrznej a odcinkiem ϱ skierowanym od punktu krzywej C do punktu xy, możemy wzór 56 przedstawić w postaci:

(57) $$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left\{ u_i \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta - f(\varrho\mu)\cdot\left(\frac{du}{dN}\right)_i \right\} ds$$

gdzie punkt x, y leży wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$.

§26. Załóżmy teraz, że punkt xy leży zewnątrz krzywej C i że funkcya u czyni zadość warunkom 1, 2, 3 z warunków $\mathfrak{B}$ (str. 47) i niech Σ_1 będzie kołem zatoczonem z punktu xy promieniem P na tyle wielkim, że zawiera wewnątrz obszar $\mathfrak{D}$; jeżeli i nadal przez N oznaczymy normalną wewnętrzną do krzywej C, a tem samem też zewnętrzną do koła Σ_1, to wolno stosować wzór 57 obecnie; otrzymujemy:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left\{ f(\varrho,\mu)\left(\frac{du}{dN}\right)_e - u_e \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta \right\} ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} \left\{ f(\varrho,\mu)\left(\frac{du}{dN}\right)_{\Sigma_1} - u_{\Sigma_1} \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta \right\} ds$$

gdzie u_{Σ}, $\left(\frac{du}{dN}\right)_{\Sigma}$ oznacza wartości, które funkcyę u, $\frac{du}{dN}$ przyjmuje na kole Σ_1.

Połóżmy $$J_1 = \int_{\Sigma_1} f(\varrho\mu)\left(\frac{du}{dN}\right)_{\Sigma_1} ds \quad ; \quad J_2 = \int_{\Sigma_1} u_{\Sigma_1} \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta\, ds$$

Ponieważ jest $\cos\vartheta = +1$ dla wszystkich punktów koła Σ_1, więc jest
$$J_1 = P\int_0^{2\pi} f(P,\mu)\left(\frac{du}{dN}\right)_{\Sigma_1} d\varphi \quad ; \quad J_2 = +P\int_0^{2\pi} u_{\Sigma_1} \frac{df(P,\mu)}{dP} ds$$

Jeżeli obecnie przyjmiemy, że funkcya u spełnia warunek 4 z warunków $\mathfrak{B}$ (str. 47), to z powodu nierówności 6 i 7 (str. 6) dla odległości P mieć będziemy:
$$\lim_{P=\infty} J_1 = 0, \quad \lim_{P=\infty} J_2 = 0$$

Wskutek tego jest dla punktu zewnętrznego:

(58) $$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left\{ f(\varrho,\mu)\left(\frac{du}{dN}\right)_e - u_e \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta \right\} ds$$

§27. Na zakończenie obecnego rozdziału uważajmy na naszej płaszczyźnie obszar płaski A i w nim dwa punkty (xy) i $(x'y')$, a przez ϱ ich odległość; niech $F(x'y')$ oznacza funkcyę tego obszaru i niech $d\tau$ oznacza element powierzchniowy w punkcie $x'y'$. Uważajmy funkcyę

(59) $$\psi(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_{(A)} F(x'y') f(\varrho,\mu)\, d\tau$$

gdzie $f(\varrho\mu)$ oznacza tylekroć przez nas uważaną funkcyę.
Jeżeli przypuścimy, że całka

$$(60) \qquad \int_A |F(x'y')|\, d\tau$$

ma sens i że ma sens całka 59, to funkcya $\psi(xy)$ jest ciągłą[+)] funkcyą zmiennych xy obszaru A.
Niech punkty xy i x_1y_1 są dość blisko siebie tak, iż koło Σ_1 o dość małym promieniu δ, zatoczone z punktu xy, leży wewnątrz obszaru A i ~~…~~ obejmuje wewnątrz punkt x_1y_1; wnętrze koła Σ_1 oznaczmy przez A_1, a pozostałą część obszaru A przez A_2; przez ϱ_1 oznaczmy odległość punktów $x'y'$ i x_1y_1 i napiszmy:

$$\psi(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_{A_1} F(x'y')\, f(\varrho\mu)\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\, f(\varrho\mu)\, d\tau$$

$$\psi(x_1y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{A_1} F(x'y')\, f(\varrho_1,\mu)\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\, f(\varrho_1,\mu)\, d\tau$$

Do każdej, dowolnie małej, dodatniej liczby ν można zmniejszyć

$$(61) \qquad \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

tak małym, że w obszarze A_2 jest

$$|f(\varrho,\mu) - f(\varrho_1,\mu)| < \nu$$

wynika to z ciągłości funkcyi $f(\varrho\mu)$, gdy jest $\varrho \neq 0$; stąd jest

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\Big(f(\varrho\mu) - f(\varrho_1\mu)\Big)\, d\tau\right| < \frac{\nu}{2\pi}\int_{A_2} |F(x'y')|\, d\tau \leq \frac{\nu}{2\pi}\int_A |F(x'y')|\, d\tau$$

całka 60 ma bowiem sens określony. Równocześnie można było obrać tak obszar A_1, iż jest

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_1} F(x'y')\, f(\varrho\mu)\, d\tau\right| < \nu$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_1} F(x'y')\, f(\varrho_1,\mu)\, d\tau\right| < \nu$$

bo, według założenia, całka 59 ma sens określony. Z tego wynika, że do każdej, dowolnej liczby ν można znaleźć liczbę dodatnią

+) Jeżeli obszar A jest skończony, to ~~…~~ całka 60 musi mieć sens, gdy go ma całka 59.; jeżeli zaś obszar A jest nieskończony, to całka 60 może być pozbawiona sensu, mimo, iż go ma całka 59 np. $F(x'y') = \varrho^n$ $(n>0)$, gdzie ϱ odległość ~~…~~ punktów $x'y'$ i xy.

d taka, iż, gdy wyrażenie 61 jest mniejsze od liczby d, to jest także

$$\left|\psi(xy)-\psi(x_1y_1)\right| < \nu\left(2+\frac{1}{2\pi}\int_A \left|F(x'y')\right| d\tau\right)$$

co wykazuje nasze twierdzenie.

Załóżmy dalej, że w obszarze moduł funkcyi $F(x'y')$ ma górną granicę t. zn., że istnieje stała dodatnia M taka, iż jest

(62) $$\left|F(x'y')\right| < M$$

w całym obszarze A.

Wtedy całki 59 (str 50) i 60 (str 51) mogą mieć sens, bo jest

$$\int_A \left|F(x'y')\right| d\tau < M\int_A d\tau$$

$$\left|\psi(xy)\right| < \frac{M}{2\pi}\int_A \left|f(\varrho\mu)\right| d\tau < \frac{M}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\varrho\mu)\right| dx'dy'$$

Widać, że jest:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\varrho,\mu)\right| dx'dy' \leq 2\pi\int_0^{\infty}\rho\, d\rho\int_0^{\infty}\frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\,dt < 2\pi\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}\,d\rho\, dt$$

kładąc $\rho = r\cos\varphi$, $t = r\sin\varphi$ otrzymujemy:

$$2\pi\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}\,d\rho\, dt = 2\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{-\infty} e^{-ar}\, r\, dr\, d\varphi = \frac{4\pi^2}{a^2}$$

przeto jest

(63) $$\left|\psi(xy)\right| < \frac{2\pi M}{a^2}$$

tem samem udowodniliśmy nasze twierdzenie i znaleźliśmy górną granicę na funkcyę $|\psi(xy)|$ bez względu na to, czy obszar A jest skończony, czy nieskończony.

Okażemy, że przy naszem założeniu 62 co do funkcyi $F(x'y')$ funkcya $\psi(xy)$ ma pochodne $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, podamy ich sposób obliczenia i wyznaczymy ich górną granicę.

W tym celu uważajmy stosunek:

$$\frac{\psi(x+h,y)-\psi(xy)}{h}$$

i okażmy, że dla $h=0$ ma granicę równą całce:

(64) $$\frac{1}{2\pi}\int_{(A)} F(x'y')\frac{\partial f}{\partial x}\,d\tau$$

analogicznie trzeba postąpić dla pochodnej $\frac{\partial\psi}{\partial y}$.

Całka 64 ma sens określony; jest bowiem:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_A F(x'y')\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}d\tau\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_A F(x'y')\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x}d\tau\right| < \frac{M}{2\pi}\int_A\left|\frac{df}{d\varrho}\right|d\tau$$

Na mocy nierówności 7 (str. 6) mamy:

$$\int_A\left|\frac{df}{d\varrho}\right|d\tau < \frac{\pi}{2}m\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-a\varrho}\rho\,d\rho\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-a\varrho}d\rho\,d\varphi = 2\pi\left(\frac{\pi}{2}\frac{m}{a^2}+\frac{1}{a}\right) < 2\pi^2\frac{m}{a^2}$$

bo jest $1 \leq \frac{m}{a}$, $\frac{\pi}{2}+1 < \pi$ i gdy wprowadzimy współrzędne biegunowe. Przeto dla całki 64 otrzymujemy nie= równość:

(65) $$\left|\frac{1}{2\pi}\int_A F(x'y')\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}d\tau\right| < \frac{Mm\pi}{a^2}$$

niezależnie od tego, czy A oznacza obszar skończony, czy nieskończony. Z tego wnioskujemy, że całka 64 ma określony sens.

Przyjmując oznaczenia strony 51 i kładąc $x_1 = x+h$, $y_1 = y$, gdzie h ma być liczbą rzeczywistą i różną od zera, otrzymujemy:

$$\left|\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} - \frac{1}{2\pi}\int_A F(x'y')\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}d\tau\right| < \left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_1}F(x'y')\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}d\tau\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_1}F(x'y')\frac{f(\varrho_1\mu)-f(\varrho\mu)}{h}d\tau\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_2}F(x'y')\left\{\frac{f(\varrho_1\mu)-f(\varrho\mu)}{h} - \frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}\right\}d\tau\right|$$

Zajmijmy się drugą całką strony prawej[x]. Na mocy pierwszej równości 10 (str. 9) otrzymujemy równość

$$\frac{f(\varrho_1\mu)-f(\varrho\mu)}{h} = \frac{\log\varrho\cdot C(\varrho) - \log\varrho_1\cdot C(\varrho_1)}{h} + \frac{D(\varrho_1)-D(\varrho)}{h}$$ gdzie

$C(\varrho)$, $C(\varrho_1)$, $D(\varrho)$, $D(\varrho_1)$ oznaczają pewne zbieżne szeregi potęgowe, łatwe do określenia na podstawie pierwszej równości 10 (str. 9). Ponieważ szereg $D(\varrho)$ przedstawia funkcyę mającą pochodną względem zmiennej x, więc można do każdej, dowolnej, liczby dodatniej ν obrać tak małe koło Σ_1, zamykające obszar A_1, że jest

(66) $$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_1}F(x'y')\frac{D(\varrho_1)-D(\varrho)}{h}d\tau\right| < \nu$$

przy każdej rzeczywistej i różnej od zera wartości na liczbę h. Ponieważ dalej klasy potencyał logarytmiczny pola płaskiego ma pochodną względem zmiennej x, a, C(ϱ) ~~xxx~~ też ma pochodną względem tej zmiennej, więc można obrać tak obszar A_1, by

x) ϱ_1 oznacza odległość punktów (x_1y_1) i $(x'y')$

obok nierówności 66 zachodziła nierówność:

(67) $$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{A_1} F(x'y') \frac{\log \varrho \cdot l(\varrho) - \log \varrho_1 \, l(\varrho_1)}{h} d\tau \right| < \nu$$

Z tego i z nierówności 66 wnosimy, że jest:

(68) $$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{A_1} F(x'y') \frac{f(\varrho_1\mu) - f(\varrho\mu)}{h} d\tau \right| < 2\nu$$

tak ta nierówność jak i nierówność 67 zachodzi dla każdej liczby h rzeczywistej i różnej od zera, która jest zgodna z naszem zagadnieniem t.j. punkt $x+h, y$ ma leżeć w obrębie obszaru A_1.
Ponieważ całka 64 (str 52) ma określony sens, więc można tak obrać obszar A_1, by obok nierówności 68 zachodziła nierówność:

(69) $$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{A_1} F(x'y') \frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x} d\tau \right| < \nu$$

Nadto można znaleźć liczbę dodatnią d, taką, że, gdy jest $|h| < d$ i gdy punkt $x+h, y$ leży wewnątrz obszaru A_1, spełniona była nierówność:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{A_2} F(x'y') \left\{ \frac{f(\varrho_1\mu) - f(\varrho\mu)}{h} - \frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x} \right\} d\tau \right| < \nu$$

z powodu istnienia pochodnej funkcyi $f(\varrho\mu)$, gdy liczba ϱ jest różna od zera i ma dolną granicę od zera odmienną.
Wobec tego istnieje do każdej dowolnej, dodatniej liczby ν liczba dodatnia d, iż gdy tylko jest $|h| < d$, to jest:

$$\left| \frac{\psi(x+h, y) - \psi(x,y)}{h} - \frac{1}{2\pi} \int_{A} F(x'y') \frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x} d\tau \right| < 4\nu$$

co wykazuje nam, że funkcya $\psi(x,y)$ ma pochodną względem x i pozwala nam ją obliczyć t.zn. jest:

(70) $$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{A} F(x'y') \frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x} d\tau$$

Zupełnie analogiczną drogą wykażemy, że jest:

(71) $$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{A} F(x'y') \frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial y} d\tau$$

Z nierówności 65 (str 53) i analogicznej dla zmiennej y otrzymujemy:

(72) $$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| < \frac{M m \pi}{a^2} \quad ; \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| < \frac{M m \pi}{a^2}$$

§28. Zwrócimy się obecnie do badania drugich pochodnych funkcyi $\psi(xy)$, określonej wzorem 59 (str 50).
Jeżeli punkt xy leży zewnątrz obszaru A i gdy obszar A jest skończony, to oczywiście funkcya ψ ma pochodne drugie; jeżeli punkt xy leży i nadal zewnątrz obszaru A i gdy obszar A jest nieograniczony można łatwo wykazać przy pomocy nierówności 7 (str 6) i analogicznej dla funkcyi $\left|\frac{d^2 f(\xi\mu)}{d\xi^2}\right|$, że i w tym wypadku pochodne drugie istnieją.
W obu wypadkach pochodne drugie funkcyi $\psi(xy)$ czynią zewnątrz obszaru A zadość równaniu:

$$(73) \qquad \Delta\psi - \mu^2\psi = 0$$

czyli równaniu

$$(74) \qquad \Delta\psi + \xi\psi = 0$$

Punkt xy niech teraz leży wewnątrz obszaru A i otoczmy go kołem Σ o środku w punkcie xy z takim promieniem, że koło Σ leży wewnątrz obszaru A; koło Σ zamyka pewien obszar, który oznaczymy przez A_1, a przez A_2 oznaczymy część pozostałą z obszaru A.
Ponieważ jest

$$\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial x} = -\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial x'}$$

więc wolno napisać wśród dotychczasowych założeń o funkcyi $F(x'y')$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial x}\,d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{A_1} F(x'y')\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial x'}\,d\tau$$

Uważajmy koło koncentryczne z kołem Σ i leżące wewnątrz obszaru A_1; obszar między kołami Σ i Σ_1 leżący oznaczymy przez A_1'; niech l, m będą dostawami normalnej zewnętrznej koła Σ, zaś l_1, m_1 dostawami normalnej zewnętrznej koła Σ_1, i w takim razie jest

$$\frac{1}{2\pi}\int_{A_1'} F(x'y')\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial x'}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} F(x'y')f(\xi\mu)\,l\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} F(x'y')f(\xi\mu)\,l_1\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{A_1'} \frac{\partial F}{\partial x'} f(\xi\mu)\,d\tau$$

przy założeniu, które obecnie czynimy, iż funkcya $F(x'y')$ ma pierwsze pochodne ciągłe i skończone w obszarze A_1 otaczającym punkt x, y.
Załóżmy, że promień koła Σ_1 zdąża do zera; otrzymamy wtedy w granicy

$$\frac{1}{2\pi}\int_{A_1} F(x'y')\frac{\partial f(\xi\mu)}{\partial x'}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} F(x'y')f(\xi\mu)\,l\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{A_1} \frac{\partial F}{\partial x'} f(\xi\mu)\,d\tau$$

bo całka odnosząca się do koła Σ_1 dąży do zera.
Wobec tego otrzymujemy na pochodną $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ równość następującą:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}\,d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} F(x'y')\, f(\varrho\mu)\, l\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{A_1}\frac{\partial F}{\partial x'}\, f(\varrho\mu)\, d\tau$$

Pierwsza całka strony prawej jest pochodną pierwszą względem zmiennej x funkcyi, w którą przechodzi funkcya ψ, gdy zamiast obszaru A weźmiemy obszar A_2, a że punkt xy leży zewnątrz tego obszaru, więc pierwszą całkę wolno różniczkować jeszcze raz względem zmiennej x; całka druga jest uogólnionym potencyałem warstwy pojedynczej, rozpostartej na kole Σ_1, punkt xy zaś leży w środku tego koła — całka druga więc ma pochodną względem zmiennej x; wyraz trzeci jest funkcyą, w którą przechodzi funkcya ψ, gdy zamiast funkcyi $F(x'y')$ weźmiemy funkcyę $\frac{\partial F}{\partial x'}$; ~~więc założymy że~~ ponieważ założyliśmy, że pochodna $\frac{\partial F}{\partial x'}$ jest ciągła i ograniczona w obszarze A_1, więc na mocy rozumowania zawartego w § 27 całka trzecia strony prawej ma w punkcie xy pochodną względem zmiennej x. Wobec tego istnieje druga pochodna funkcyi ψ względem x i jest:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial x^2}\,d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} F(x'y')\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}\, l\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{A_1}\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}\,d\tau$$

Zupełnie analogicznem rozumowaniem można wykazać istnienie funkcyi $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ i okazać, że jest także:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\frac{\partial^2 f(\varrho\mu)}{\partial y^2}\,d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} F(x'y')\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial y}\, m\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{A_1}\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial y}\,d\tau$$

W drugich całkach stron prawych kładąc:

$$\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x} = -\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\,l \; ; \quad \frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial y} = -\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\,m$$

otrzymujemy:

$$\Delta\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\,\Delta f(\varrho\mu)\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} F(x'y')\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{A_1}\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{A_1}\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial y}\,d\tau$$

Z nierówności 7 (str 6) otrzymujemy, że, mając dane koło Σ_1 i obszar jego A_1 można znaleźć dodatnią stałą $\mathfrak{B}$, taką, iż jest w obszarze A_1

$$\left|\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}\right| \leq \left|\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\right| < \frac{\mathfrak{B}}{\varrho} \; ; \quad \left|\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial y}\right| < \frac{\mathfrak{B}}{\varrho}$$

Jeżeli przez N oznaczymy górną granicę modułu funkcyi $\frac{\partial F}{\partial x'}$ i $\frac{\partial F}{\partial y'}$ w obszarze A_1, przez R promień koła Σ_1, to otrzymamy:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_1}\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial x}\,d\tau\right| < N\mathfrak{B}R \; , \quad \left|\frac{1}{2\pi}\int_{A_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f(\varrho\mu)}{\partial y}\,d\tau\right| < N\mathfrak{B}R$$

Wobec tego jest:

$$\left|\Delta\psi - \frac{\mu^2}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\, f(\xi\mu)\, d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} F(x'y')\, \frac{df(\xi\mu)}{d\varrho}\, ds \right| < 2NBR$$

jeżeli skorzystamy z równania 8 (str 7), które jest spełnione w każdym punkcie obszaru A_2, nadto jest $\xi = -\mu^2$.
Jeżeli założymy teraz, że promień R koła Σ_1 dążą do zera, to prawa strona dąży do zera, a że jest:

$$\lim_{R=0}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{A_2} F(x'y')\, f(\xi\mu)\, d\tau\right\} = \psi(xy)$$

$$\lim_{R=0}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} F(x'y')\, \frac{df(\xi\mu)}{d\varrho}\, ds\right\} = -F(xy)$$

na mocy drugiej z nierówności 10 (str 9) i na mocy tej uwagi, że funkcya $F(x'y')$ jest ciągłą w punkcie xy.
Ostatecznie widzimy, że drugie pochodne funkcyi ψ wewnątrz obszaru A_1 spełniają równanie różniczkowe w punkcie (xy):

$$(75) \qquad \Delta\psi - \mu^2\psi + F(xy) = 0$$

czyli

$$(76) \qquad \Delta\psi + \xi\psi + F(xy) = 0$$

III. O równaniu $\Delta u + \xi u = 0$.

§ 29. Niech funkcya $u(xy)$ czyni zadość równaniu:

$$(1) \qquad \Delta u + \xi u = 0$$

wewnątrz obszaru D, gdzie ξ oznacza dowolną liczbę.
Okażemy twierdzenie następujące: o ile część rzeczywista $\alpha = \rho_1 \cos\theta$ liczby $\xi = \alpha + i\beta = \rho_1(\cos\theta + i\sin\theta)$ nie jest liczbą dodatnią, to moduł funkcyi $u(xy)$ nie może mieć w żadnym punkcie wewnątrz obszaru D maximum.
Załóżmy, że funkcya $|u(xy)|$ posiada maximum w punkcie $A(x_0 y_0)$, leżącym wewnątrz obszaru D i otoczmy go kołem Σ o promieniu R, różnym od zera, a na tyle małym, iż całe koło Σ pada wewnątrz obszaru D. Skierujmy normalną do koła na wewnątrz obszaru, który zamyka i stosujmy wzór 57 (str 50), przyczem granice funkcyi $u(xy)$, $\frac{du}{dN}$ przy kole Σ są identyczne z wartościami, które te funkcye tam

przybierają, więc jest:

$$(2)\qquad u(x_0y_0) = \frac{-1}{2\pi}\int_{\Sigma} u\,\frac{df(R,\mu)}{dR}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{du}{dN}\,f(R,\mu)\,ds$$

Funkcya $f(\varrho\mu)$ czyni zadość równaniu 8 (str. 7); temu samemu równaniu czyni zadość funkcya:

$$J(\varrho,\mu) = 1 + \sum_1^{\infty}\frac{\mu^{2k}\varrho^{2k}}{(2^k k!)^2}$$

bo równaniu:

$$\Delta J + \xi J = 0$$

~~a ponieważ~~ a że czyni zadość warunkom A (str. 47), a więc wolno ją podstawić w miejsce funkcyi v we wzorze 55 (str. 49), czyli otrzymujemy:

$$(3)\qquad 0 = \frac{-1}{2\pi}\int_{\Sigma} u.\,\frac{dJ(R\mu)}{dR}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{du}{dN}\,J(R\mu)\,ds$$

Z tej równości i równości 2 otrzymujemy równość:

$$(4)\qquad u(x_0y_0) = \frac{-1}{2\pi}\left(\frac{df(R\mu)}{dR} - \frac{f(R\mu)}{J(R\mu)}\cdot\frac{dJ(R\mu)}{dR}\right)\cdot\int_{\Sigma} u\,ds$$

Współczynnik całki:

$$(5)\qquad A = \frac{df(R\mu)}{dR} - \frac{f(R\mu)}{J(R\mu)}\cdot\frac{dJ(R\mu)}{dR}$$

jest wartością szczególną funkcyi

$$(6)\qquad F(\varrho\mu) = \frac{J(\varrho\mu)\,\frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho} - f(\varrho\mu)\,\frac{dJ(\varrho\mu)}{d\varrho}}{J(\varrho\,\mu)}$$

dla wartości $\rho = R$.

Z równania różniczkowego 8bis (str. 7) i równania:

$$\frac{d^2J(\varrho\mu)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{dJ(\varrho\mu)}{d\varrho} + \xi\,J(\varrho\mu) = 0$$

otrzymujemy

$$J(\varrho\mu)\,\frac{d^2f(\varrho\mu)}{d\varrho^2} - f(\varrho\mu)\,\frac{d^2J(\varrho\mu)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,J(\varrho\mu)\,F(\varrho\mu) = 0$$

a stąd przez całkowanie jest:

$$\rho.\,J(\varrho\mu)\,F(\varrho\mu) = Const.$$

Biorąc granicę dla $\varrho = 0$ otrzymujemy

$$Const = -1$$

przeto jest

$$F(\varrho\mu) = -\frac{1}{\rho\,J(\varrho\mu)}$$

a stąd jest

$$(7)\qquad A = F(R\mu) = -\frac{1}{R\,J(R\mu)}$$

Kładąc

$$J(\varrho\mu) = J_1(\varrho\mu) + i\,J_2(\varrho\,\mu)$$

otrzymujemy

$$J_1(R,\mu) = 1 + \sum_1^{\infty}\frac{(-\beta)^k\cos k\theta\cdot R^{2k}}{(2^k\cdot k!)^2}$$

$$J_2(R,\mu) = \sum_1^\infty \frac{(-\rho_1)^k \sin k\Theta . R^{2k}}{(2^k . k!)^2}$$

Wobec tego jest

$$J_1(R,\mu) = 1 - \frac{\rho_1 R^2 \cos\Theta}{4} + J_3$$

gdzie jest

$$J_3 = \frac{\rho_1^2 R^4 \cos 2\Theta}{(2^2.2!)^2} - \frac{\rho_1^3 R^6 \cos 3\Theta}{(2^3.3!)^2} + \frac{\rho_1^4 R^8 \cos 4\Theta}{(2^4.4!)^2} - \dots$$

Załóżmy, że ~~promień~~ R tak dobraliśmy, ~~by~~ koło Σ_1, leżące wewnątrz obszaru D, iż jest $\rho_1 R^2 < 1$, wtedy jest

$$|J_3| < \rho_1^2 R^4 . B$$

gdzie jest B suma szeregu zbieżnego, liczbowego:

$$B = \frac{1}{(2^2.2!)^2} + \frac{1}{(2^3.3!)^2} + \frac{1}{(2^4.4!)^2} + \dots$$

Jeżeli przypuścimy, że liczba α jest ujemna czyli liczba $\cos\Theta$, to przyjmując, że liczba R spełnia także nierówność

$$\rho_1 R^2 B < \frac{|\cos\Theta|}{4}$$

sprawimy, że jest

$$J_1(R,\mu) > 1$$

przeto jest także

$$(8) \qquad |J(R,\mu)| > 1 \quad \text{gdy jest } R \neq 0 \text{ i } \alpha < 0.$$

Niech teraz jest $\Theta = \frac{\pi}{2}(2j+1)$, gdzie jest $j = 0, 1$, wtedy jest $\cos\Theta = 0$. Wtedy jest

$$J_1(R,\mu) = 1 - \frac{\rho_1^2 R^4}{(2^2.2!)^2} + \frac{\rho_1^4 R^8}{(2^4.4!)^2} - \frac{\rho_1^6 R^{12}}{(2^6.6!)^2} + \dots$$

$$J_2(R,\mu) = \mp \left(\frac{\rho_1 R^2}{(2.1!)^2} - \frac{\rho_1^3 R^6}{(2^3.3!)^2} + \dots \right)$$

znak podwójny w drugiej równości zależy od tego, czy jest $j=0$ czy też $j=1$.

Jeżeli znowu założymy, dla koła Σ_1, leżącego wewnątrz obszaru D obraliśmy promień R tak, iż jest: $\rho_1 R^2 < 1$, to jest

$$J_1(R\mu) > 1 - \frac{\rho_1^2 R^4}{64}$$

$$|J_2(R\mu)| > \frac{\rho_1 R^2}{4} - \frac{\rho_1^3 R^6}{48^2}$$

a stąd wynika, że jest

$$J_1^2(R\mu) + J_2^2(R\mu) > 1$$

a więc w tych wypadkach zachodzi nierówność 8, gdy więc jest $\alpha = 0$.

Ponieważ z nierówności 4, 5 i 7 (str 58) wnioskujemy, że jest

$$u(x_0 y_0) = + \frac{1}{2\pi R J(R\mu)} \int_{\Sigma_1} u \, d\Sigma$$

a z uwagi, że, gdy jest $\alpha \leq 0$ i $R \neq 0$, to zachodzi nierówność 8,

mamy
$$\left|u(x_0y_0)\right| < \frac{1}{2\pi R}\left|\int\limits_{\Sigma} u\,ds\right| \leq \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Sigma_1} |u|\,ds$$
tak, iż dla naszego koła Σ_1 jest

(9) $$\left|u(x_0y_0)\right| < \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Sigma} |u|\,ds$$

Niech funkcya $u(xy)$ ma właśnie w punkcie x_0y_0 maximum modułu swego, że więc jest
$$\left|u(x_0y_0)\right| \geqq \left|u(xy)\right|$$
gdzie punkt xy należy do otoczenia punktu x_0y_0 i nadto równość nie ma zachodzić dla wszystkich punktów dość bliskiego otoczenia punktu x_0y_0. Stąd wnosimy, że jest
$$\left|u(x_0y_0)\right| \geqq \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\Sigma_1} |u|\,ds$$
co jest w oczywistej sprzeczności z nierównością 9. Wobec tego nasze twierdzenie udowodniliśmy.

To samo twierdzenie – oczywiście z rozumowaniem – stosuje się też do obszaru D'.

Stąd wyprowadzamy bezpośrednio trzy wnioski:

1) Jeżeli funkcya $u(xy)$ spełnia wewnątrz obszaru D równanie 1 (str. 57) i jeżeli wzdłuż krzywej C jest stale $u_i = 0$, to funkcya ta jest identycznie równa zeru w obszarze D, o ile część rzeczywista liczby ξ nie jest liczbą dodatnią.

2) Jeżeli funkcya $u(xy)$ spełnia wewnątrz obszaru D' równanie 1 (str. 57) i jeżeli wzdłuż krzywej C jest stale $u_e = 0$ a gdy punkt (xy) dąży do nieskończoności, funkcya $u(xy)$ staje się zerem jednostajnie, to funkcya ta jest identycznie zerem w obszarze D', o ile część rzeczywista liczby ξ nie jest liczbą dodatnią.

3) Problem Dirichleta tak t. zw. wewnętrzny, jak i t. zw. zewnętrzny ma co najwyżej po jednem rozwiązaniu, jeżeli część rzeczywista parametru ξ nie jest dodatnia.

§ 30. Okażemy teraz, że te trzy wnioski zostają i wtedy słuszne, gdy nawet część rzeczywista liczby ξ jest dodatnia, byle wtedy część urojona liczby ξ zerem nie była. Wypada nadmienić, że przypadek $\xi = 0$ stale usuwamy z rozważania, bo znany jest z klasycznej teoryi.

Ponieważ udowodnimy wnioski 1, 2, 3 z § 29 za pomocą twierdzenia Greena, więc musimy wykazać istnienie granicy pochodnej normalnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$, o ile nam chodzi o obszar $\mathfrak{D}$, gdy zaś nam chodzi o obszar zewnętrzny $\mathfrak{D}'$, musimy wykazać istnienie granicy $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$ i także zachowanie się funkcyi u i $\frac{du}{dN}$ w nieskończoności, by twierdzenie Greena i w tym wypadku było stosowalne.

Zajmiemy się najpierw wypadkiem, wymagającym więcej rozumowania, a mianowicie twierdzeniem: „Jeżeli funkcya $u(xy)$ spełnia wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}'$ równanie 1 (str. 57) i jeżeli wzdłuż krzywej $\mathfrak{C}$ jest stale $u_e = 0$, a gdy punkt xy w jakikolwiek sposób dąży do nieskończoności, funkcya $u(xy)$ staje się zerem jednostajnie, to funkcya ta jest identycznie zerem w obszarze $\mathfrak{D}'$, gdy część rzeczywista ξ jest nawet dodatnia, byle wtedy część urojona była od zera odmienna."

W tym celu udowodnimy następujące twierdzenia pomocnicze:

1. Jeżeli funkcya $u(xy)$ spełnia równanie 1 (str. 57) wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}'$, a gdy punkt xy w jakikolwiek sposób dąży do ~~zera~~ nieskończoności, funkcya $u(xy)$ dąży do zera jednostajnie, to funkcyę $u(xy)$ można wyrazić w dostatecznej odległości od krzywej $\mathfrak{C}$ za uogólniony potencyał mas położonych w skończoności, o ile liczba ξ nie redukuje się do liczby dodatniej.
2. Jeżeli przez Σ_1 oznaczymy koło, wewnątrz którego leży krzywa $\mathfrak{C}$, przez Ω' obszar zewnątrz koła Σ_1 leżący, funkcya $u(xy)$ i parametr ξ spełnia wewnątrz obszaru Ω' te same warunki, co w twierdzeniu 1, to o ile punkt xy ma odległości od koła Σ_1 nie mniejsze od liczby d różnej od zera, funkcya $u(xy)$ ma dla takich punktów xy pochodne pierwsze ograniczone.
3. Jeżeli funkcya $u(xy)$ spełnia te same warunki co w twierdzeniu 1, posiada granicę pochodnej normalnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$.

Ponieważ wyłączyliśmy wypadek $\xi = 0$, nadto, kiedy parametr ξ staje się liczbą dodatnią, przeto, kładąc $\mu = a + ib$ (§ 3, str. 5), widzimy, że liczba a jest od zera odmienna.

Twierdzenie 1 oznacza, że funkcyę $u(xy)$ można przedstawić w formie analogicznej do wzoru 58 (str. 50):

$$(10) \qquad u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int \left(f(\xi, \mu r) \frac{du}{dN} - u \frac{df(\xi \mu r)}{d\varrho} \cos\vartheta \right) ds$$

gdy punkt xy leży gdziekolwiek wewnątrz obszaru Ω'.

Aźeby wyprowadzić wzór 10, musi funkcya $u(x,y)$ spełniać pewne warunki, z ~~których~~ wystarczającemi są zczywiście warunki B (str 47) tylko w nich literę D' należy zastąpić literą Ω', literę C literą Σ. Tak przekształcone warunki oznaczę literą B'.

Jeżeli założymy, że ~~na~~ krzywą Σ nie ma punktu wspólnego z krzywą C, to będzie spełniony warunek 3 z warunków B'; że są spełnione warunki 1 i 2 z warunków B' również jest widoczne. Jeszcze trzeba się przekonać, czy spełniony jest warunek 4. Ponieważ funkcya $u(xy)$, gdy punkt xy zdąża w nieskończoność, dąży do zera jednostajnie ~~[illegible]~~ do zera, więc zostaje nam się przekonać, czy pochodne pierwsze funkcyi $u(xy)$ są ograniczone w obszarze D', względnie Ω'.

Niech liczba ξ_0 będzie liczbą dodatnią i taką, iż parametr $\xi = -\xi_0$ spełnia nierówność 14 (str 40). Połóżmy $u = \psi + w$, gdzie niech ψ będzie potencyałem warstwy podwójnej, czyniącej zadość równaniu

$$(11) \qquad \Delta\psi - \xi_0\psi = 0$$

poza krzywą Σ, i niech na niej spełnia warunek

$$\psi_e = u_\Sigma$$

gdzie u_Σ przedstawia wartości, które funkcya $u(xy)$ przyjmuje na kole Σ. Wskutek tego ~~jest~~ wzdłuż koła Σ jest

$$w_e = 0$$

Z równania 1 (str 57) i 11 otrzymujemy:

$$\Delta(u-\psi) + \xi u + \xi_0\psi = 0$$

czyli

$$(12) \qquad \Delta w - \xi_0 w + (\xi_0 + \xi)u = 0$$

Mamy zbudować taką funkcyę w, która wewnątrz obszaru Ω' spełnia równanie 12, a wzdłuż krzywej Σ warunek $w_e = 0$.

W tym celu kładę

$$w = \phi - v$$

gdzie przytem wzdłuż krzywej Σ jest

$$(13) \qquad v_e = \phi_e$$

Jeżeli założymy, że funkcya v jest potencyałem warstwy podwójnej, spełniającej wewnątrz obszaru Ω' równanie:

$$(14) \qquad \Delta v - \xi_0 v = 0$$

(taki potencyał istnieje, jak wiemy, i tylko jeden.) przeto na funkcyę ϕ otrzymujemy warunek, iż ona wewnątrz obszaru Ω'

spełnia równanie

(14) $$\Delta\phi - \xi_0\phi + (\xi + \xi_0)u = 0$$

Porównując to równanie z równaniem 76 (str 57) widzimy, że taką funkcyę umiemy zbudować. Oznaczając przez μ_0 liczbę, w którą przechodzi liczba μ, gdy liczbę ξ zastąpimy liczbą $-\xi_0$, otrzymujemy na funkcyę ϕ wzór:

(15) $$\phi = \frac{\xi + \xi_0}{2\pi}\int_{\Omega'} u(x'y') f(\rho\,\mu_0)\,d\tau$$

gdzie ρ oznacza odległość punktów $x'y'$ i punktu xy, do którego się odnosi wartość funkcyi ϕ; ponieważ funkcya $u(x'y')$ jest ograniczona, przeto według §27 (str 50 i nast.) funkcya ϕ ma pochodne w każdym punkcie obszaru Ω' i wskutek nierówności 72 (str 54) są te pierwsze pochodne w obszarze Ω' ograniczone.

Otóż mamy

$$u = \psi + \phi - v$$

przyczem funkcye ψ, v mają pochodne pierwsze ograniczone dla wszystkich punktów obszaru Ω', których odległość od punktów krzywej Σ nie wynosi mniej, niż pewna dowolna dodatnia liczba d.

Wobec tego widzimy, że spełniony jest czwarty z warunków B' zupełnie, a użycie wzoru 10 (str 61) dozwolone.

Udowodnijmy ~~równanie~~ twierdzenie 3 ze str. 61.

W tym celu połóżmy

$$u = \phi - v$$

gdzie niech v oznacza ~~potencyał warstwy podwójnej~~ funkcyę spełniającą wewnątrz obszaru Ω' równanie:

(16) $$\Delta v - \xi_0 v = 0$$

gdzie ξ_0 oznacza taką samą liczbę, jak na str 62. Wobec tego funkcya ϕ ma spełniać równanie 14 wewnątrz obszaru Ω' i dlatego połóżmy

$$\phi(xy) = \frac{\xi + \xi_0}{2\pi}\int_{(\Omega')} u(x'y') f(\rho, \mu_0)\,d\tau$$

gdzie liczby μ_0 i ρ mają te same znaczenia, co wyżej. Ponieważ funkcya $u(xy)$ jest ograniczona w całym obszarze, więc funkcya $\phi(xy)$ ma pochodne pierwsze w całym obszarze Ω' i posiada granicę $\left(\frac{d\phi}{dN}\right)_{e'}^{\rho}$, która z powodu ciągłości widocznej równa się

granicy $\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i$. Ponieważ chodzi nam o to, by utworzyć[64] taką funkcyę v, by[*] miała granicę pochodnej normalnej $\left(\frac{dv}{dN}\right)_e$ wzdłuż krzywej C i nadto także ma być $u_e = 0$, więc niech v przedstawia potencyał warstwy pojedynczej, który wewnątrz obszaru D' spełnia równanie 16 (str. 63), a wzdłuż krzywej C warunek:

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i$$

a funkcya taka v istnieje jak wiemy.[x)] Wobec tego istnieje granica $\left(\frac{dv}{dN}\right)_e$ i ostatecznie granica pochodnej $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$ dla każdego punktu krzywej C.

§ 31. Ponieważ udowodniliśmy trzy twierdzenia wyłożone na str. 61, więc do uważanej funkcyi $u(xy)$ i obszaru D' wolno stosować twierdzenie Greena.

Połóżmy teraz

$$\xi = \alpha + i\beta \qquad (\beta \neq 0)$$

$$u = u_1 + i u_2$$

gdzie u_1, u_2 oznaczają funkcye rzeczywiste zmiennych xy; funkcye te spełniają wewnątrz obszaru D' równania:

$$(17) \quad \begin{aligned} \Delta u_1 + \alpha u_1 - \beta u_2 &= 0 \\ \Delta u_2 + \alpha u_2 + \beta u_1 &= 0 \end{aligned}$$

wzdłuż krzywej C spełniają warunek:

$$(17) \quad (u_1)_e = 0 \;,\; (u_2)_e = 0$$

Ze wzoru Greena zastosowanego do funkcyi $u_1 u_2$ otrzymujemy:

$$\int_{(C)} \left\{ (u_1)_e \left(\frac{du_2}{dN}\right)_e - (u_2)_e \left(\frac{du_1}{dN}\right)_e \right\} ds - \int_{(D')} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1)\, d\tau = 0$$

z warunków 17 wynika

$$\beta \int_{D'} \{u_1^2 + u_2^2\} d\tau = 0$$

a, że jest $\beta \neq 0$ więc w całym obszarze D' jest $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$ i zarazem $u \equiv 0$.

Gdy jest $\beta = 0$, to połóżmy $\xi = -m^2$, gdzie m oznacza liczbę rzeczywistą, różną od zera. Kładąc $u = u_1 + iu_2$, otrzymujemy, że funkcye rzeczywiste u_1, u_2 spełniają wewnątrz obszaru D' równania:

$$\Delta u_1 - m^2 u_1 = 0 \;;\; \Delta u_2 - m^2 u_2 = 0$$

dwa równania więc tego samego typu; dość zająć się jednem

x) na mocy § 34 str. 67 będzie w obszarze D $v = \Phi$ więc $v_e = \Phi_e$ i $u_e = 0$

równaniem. Z równania:

$$\iint_{D'} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 \right\} d\tau - \int_C (u_1)_e \left(\frac{du_1}{dN}\right)_e ds + \int_{D'} u_1 \Delta u_1 \, d\tau = 0 \; {}^{*)}$$

otrzymujemy

$$\iint_{D'} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 \right\} d\tau + m^2 \int_{(D')} u_1^2 \, d\tau = 0$$

z czego wnioskujemy, że jest $u_1 \equiv 0$ w całym obszarze D' i podobnie otrzymalibyśmy $u_2 \equiv 0$ czyli jest $u \equiv 0$.

Wypadek $m = 0$ jest ~~znanym~~ wypadkiem z klasycznej teoryi.

§32. Co się z tego rozumowania zmieni, gdy chodzi o obszar wewnętrzny D? Ponieważ chodzi o zastosowanie do niego twierdzenia Greena, przeto tylko trzeba wykazać istnienie ~~gra~~ granicy $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$ wzdłuż krzywej C. Otóż to uskuteczni się zupełnie analogiczną metodą do tej, przy pomocy której wykazaliśmy istnienie granicy $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$. Wobec tego powiadamy:

„O ile parametr ξ nie redukuje się do liczby ~~r~~ rzeczywistej i dodatniej, to funkcya $u(xy)$ musi być identycznie równa zeru, jeżeli wewnątrz obszaru D spełnia równanie $\Delta u + \xi u = 0$, a wzdłuż krzywej C spełnia warunek $u_i = 0$.

„O ile parametr ξ nie redukuje się do liczby rzeczywistej i dodatniej, to funkcya $u(xy)$ musi być identycznie równa zeru, jeżeli wewnątrz obszaru D' spełnia równanie $\Delta u + \xi u = 0$, a wzdłuż krzywej C spełnia warunek $u_e = 0$, nadto, gdy punkt xy oddala się w jakikolwiek sposób do nieskończoności funkcya $u(xy)$ dąży jednostajnie do zera.

§33. Przejdźmy teraz do zagadnienia nowego: załóżmy, że funkcya $u(xy)$ czyni zadość wewnątrz obszaru D równaniu 1 (str. 57), a wzdłuż krzywej C warunkowi

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i$$

gdzie h oznacza rzeczywistą i ciągłą funkcyę punktu krzywej C. Okażemy, że w pewnych warunkach na parametr funkcya $u(xy)$

---

*) Znaczenie takiego krótkiego sposobu pisania wiadome: powinno się było obrać krzywą np. ~~[illegible]~~ leżącą wewnątrz, uwzględnić, co się da, a potem przejść dopiero do granicy; to samo odnosi się do str. 64.

jest identycznie równa zeru.

Niech jest $\xi = \alpha + i\beta$, $u = u_1 + iu_2$, gdzie u_1, u_2 są funkcyami rzeczywistemi; wtedy te funkcye czynią wewnątrz obszaru D zadość równaniom

(17) $$\Delta u_1 + \alpha u_1 - \beta u_2 = 0, \quad \Delta u_2 + \alpha u_2 + \beta u_1 = 0$$

a wzdłuż krzywej C warunkom

(18) $$\left(\frac{du_1}{dN}\right)_i = h(u_1)_i \quad ; \left(\frac{du_2}{dN}\right)_i = h(u_2)_i .$$

~~Wolno tu stosować~~ twierdzenie Greena do funkcyi u_1, u_2:

$$\int_{(C)} \left\{ (u_1)_i \left(\frac{du_2}{dN}\right)_i - (u_2)_i \left(\frac{du_1}{dN}\right)_i \right\} ds + \int_{(D)} (u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1) d\tau = 0 \quad ^{x)}$$

stąd i z równości (17) i (18) otrzymujemy:

$$\beta \int_{(D)} (u_1^2 + u_2^2) d\tau = 0$$

gdy więc jest $\beta \neq 0$, jest w obszarze D $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$ czyli $u = 0$ w całym obszarze D.

Niech teraz $\beta = 0$ i niech ξ_0 jest ~~liczba~~ ~~jest~~ liczbą rzeczywistą i dodatnią, a parametr $\xi = -\xi_0$. Funkcya $u(xy)$ spełnia więc równanie:

$$\Delta u - \xi_0 u = 0$$

wewnątrz obszaru D. Kładę $u = u_1 + iu_2$, to funkcye rzeczywiste u_1, u_2 spełniają wewnątrz obszaru D równania:

$$\Delta u_1 - \xi_0 u_1 = 0 \quad ; \quad \Delta u_2 - \xi_0 u_2 = 0$$

a wzdłuż krzywej C warunki 18. Wobec tej symetryi wystarczy zająć się jedną z funkcyi u_1, u_2. Całka Greena zastosowana do funkcyi u_1 daje

(19) $$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u_1^2 \right\} d\tau + \int_{(C)} h u_1^2 ds = 0$$

Weźmiemy do pomocy pewne twierdzenie podane przez p. p. Zarembę w pracy p.t. „O tak zwanych funkcyach zasadniczych w teoryi równań fizyki matematycznej" (Nakładem Akademii Umiejętności w Krakowie 1901, str 8, wzór 23), które można wyprowadzić i dla dwu zmiennych. A mianowicie: niech F jest dowolną funkcyą rzeczywistą dwu zmiennych xy, określoną w obszarze D_r ~~i~~ i taką, że całka

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 F^2 \right\} d\tau$$

x) p. uwagę str 65.

ma sens określony, to jest

$$(20)\quad \frac{\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 F^2 \right\} d\tau}{\int\limits_C F^2 ds} > \frac{\sqrt{\xi_0}}{4c}$$

gdy tylko liczba ξ_0 jest dostatecznie wielka, a mianowicie, gdy jest

$$\frac{c}{\mathcal{L}\sqrt{\xi_0}} \leq \frac{1}{4}$$

czyli gdy jest

$$\xi_0 \geq \frac{16c^2}{\mathcal{L}^2}$$

gdzie c i $\mathcal{L}$ oznaczają stałe zależne od krzywej C znane nam z § 16 (str. 30 i nast.)

Z nierówności 19 (str. 66) otrzymujemy:

$$(21)\quad \frac{\int\limits_{D} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u_1^2 \right\} d\tau}{\int\limits_C u_1^2 ds} \leq \mathcal{H}$$

gdzie $\mathcal{H}$ oznacza górną granicę modułu funkcyi h wzdłuż krzywej C. Jeżeli obierzemy liczbę dodatnią ξ_0 tak, aby równocześnie zachodziły nierówności

$$(22)\quad \xi_0 \geq \frac{16c^2}{\mathcal{L}^2} \quad ; \quad \xi_0 > 16c^2\mathcal{H}^2$$

to nierówność 21 stanie się sprzeczną z nierównością 20, w której kładziemy $F = u_1$. Ta sprzeczność da się tylko w ten sposób usunąć, że przyjmiemy, iż dla liczb ξ_0 spełniających nierówności 22 jest $u_1 \equiv 0$; podobnie trzeba położyć $u_2 \equiv 0$ czyli $u \equiv 0$.

Gdy więc parametr ξ jest liczbą rzeczywistą i ujemną, $\xi = -\xi_0$, gdzie ξ_0 jest liczbą dodatnią większą od większej z liczb $16c^2\mathcal{H}^2$, $\frac{16c^2}{\mathcal{L}^2}$, to funkcya u jest identycznie równa zeru.

Gdyby funkcya h na krzywej C nie była ujemna, toby z równości 19 (str. 66) wynikało, że jest wprost $u_1 \equiv 0$ i podobnie $u_2 \equiv 0$ czyli $u \equiv 0$ w obszarze D.

§ 34. Oznaczmy teraz przez $u(xy)$ funkcyę spełniającą wewnątrz obszaru D równanie 1 (str. 57), a wzdłuż krzywej C równanie

$$(23)\quad \left(\frac{du}{dN}\right)_i = 0.$$

Kładąc $u = u_1 + iu_2$, otrzymujemy, że rzeczywiste funkcye u_1, u_2 spełniają wewnątrz obszaru D równania:

$$(24)\quad \Delta u_1 + \alpha u_1 - \beta u_2 = 0 \quad ; \quad \Delta u_2 + \alpha u_2 + \beta u_1 = 0$$

a wzdłuż krzywej C równania:

(25) $\left(\frac{du_1}{dN}\right)_e = 0 \quad , \left(\frac{du_2}{dN}\right)_i = 0$

Obierzmy dowolny punkt O na krzywej C i wykreślmy ~~jego~~ normalną skierowaną na wewnątrz; obrawszy dowolną liczbę dodatnią i dość małą ν obierzmy na normalnej punktu O wewnątrz obszaru D taki punkt M', by dla wszystkich punktów ~~od~~ pośrednich odcinka OM' i dla punktu M', było $\left|\frac{du_1}{dN}\right| < \nu$. Oznaczmy przez M punkt dowolny odcinka OM' między punktami O i M' położony; przez u_1, u_1' oznaczmy wartości funkcyi u_1 w punktach M i M'; ponieważ wolno do funkcyi u_1 stosować twierdzenie średniej wartości, więc jest

(26) $u_1' = u_1 + d \cdot \left(\frac{du_1}{dN}\right)_P$

gdzie d oznacza długość odcinka MM', zaś $\left(\frac{du_1}{dN}\right)_P$ wartość pochodnej normalnej pewnego określonego punktu P odcinka MM'. Jeżeli teraz założymy, że punkt M nieograniczenie się zbliża do punktu O po normalnej, to wartość u_1 nie może rość nieograniczenie, a że na odcinku M'O w punktach pośrednich jest ciągła, więc jak wiadomo z analizy, musi, nie mogąc rość nieograniczenie, mieć określoną granicę $(u_1)_i$; podobnie wykazać możemy, że istnieje granica $(u_2)_i$. Wobec tego można przyjąć, że punkt M jest tak bliski punktu O, iż jest

$$|u_1 - (u_1)_i| < \frac{\nu}{2}$$

czyli kładąc $\quad u_1 = (u_1)_i + \eta$

otrzymujemy z równości 26:

$$|u_1' - (u_1)_i| \leq |\eta| + \left|d \cdot \frac{du_1}{dN}\right|_P$$

ale~~ż~~ można było obrać ~~tak~~ odcinek M'O, iż jest

$$\left|M'O \cdot \frac{du}{dN}\right| < \frac{\nu}{2}$$

i to niezależnie od punktu O z powodu tego, że granice 25 osiągane są wedługzałożenia jednostajnie; jest przeto

$$|u_1' - (u_1)_i| < \nu$$

i to jednostajnie, bo wartość u_1' zależna od wyboru punktu M, który musiał być może wybrany w zależności od punktu O, znikła ostatecznie. Z powodu ciągłości funkcyi u_1' wynika stąd, że granica $(u_1)_i$ jest funkcyą ciągłą, a więc funkcyą całkowalną. Podobną własność wykazać można dla granicy $(u_1)_e$

Stosując teraz twierdzenie Greena do funkcyi u_1 u_2 otrzymujemy

$$\beta \int_{(D)} (u_1^2 + u_2^2) d\tau = 0$$

co przy nierówności $\beta \neq 0$ daje $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$ czyli $u \equiv 0$ w całym obszarze D. Jeżeli jest $\beta = 0$ i $\xi = -\xi_0$ gdzie ξ_0 jest liczbą dodatnią, to z twierdzenia Greena otrzymujemy:

$$\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u_1^2 \right\} d\tau = 0$$

co daje $u_1 \equiv 0$ i podobnie otrzymalibyśmy $u_2 = 0$ czyli jest $u \equiv 0$ w całym obszarze D. Gdyby zaś było $\xi_0 = 0$ otrzymalibyśmy jedynie, że w całym obszarze D jest $u = Const.$ O ile więc liczba ξ nie jest dodatnią lub zerem, funkcya $u(xy)$ jest w całym obszarze D identycznie równa zeru. Gdy jest $\xi = 0$, to funkcya $u(xy)$ redukuje się do stałej wartości w całym obszarze D.

§ 35, Załóżmy obecnie, że funkcya $u(xy)$ czyni zadość równaniu 1 (str. 57) wewnątrz obszaru D', a wzdłuż krzywej C spełnia warunek

$$(27) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e = 0.$$

a gdy punkt xy w jakikolwiek sposób oddala się w nieskończoność, to funkcya $u(xy)$ dąży do zera jednostajnie. O ile parametr ξ nie redukuje się do liczby rzeczywistej nieujemnej, to według rozumowania str 61 i nast. można uważać funkcyę $u(xy)$ za potencyał mas położonych w skończoności, gdy punkt xy jest w dostatecznej odległości od krzywej C. Rozumowaniem podobnem do rozumowania strony 68 wykażemy, że istnieje granica u_e ~~cał~~ ciągła wzdłuż krzywej C. Stosując twierdzenia Greena, jak w § 34 otrzymamy, że jest funkcya $u(xy)$ identycznie równa zeru w całym obszarze D'.

IV. O funkcyi Greena i funkcyi W.

§ 36 Przez uogólnioną funkcyę Greena $G(x_0 y_0, xy, \xi)$ czyli krótko przez funkcyę Greena $G(x_0 y_0, xy, \xi)$ obszaru D, przyjmując punkt $P_0(x_0 y_0)$ tego obszaru za stały, zwany biegunem tej funkcyi, rozumie-

my funkcyę punktu $P(xy)$ obszaru D i parametra danego ξ o następujących własnościach:

1) uważana jako funkcya zmiennych xy wewnątrz obszaru D, wyjąwszy punkt P_0 spełnia równanie:

$$(1) \qquad \Delta G + \xi G = 0$$

2) suma

$$(2) \qquad G + \frac{\log \rho}{2\pi}$$

gdzie ρ oznacza długość odcinka P_0P, jest już funkcyą ciągłą w punkcie P_0, a więc i w całym obszarze D;

3) gdy punkt xy nieograniczenie się zbliża do krzywej C, to wzdłuż niej ma być

$$(3) \qquad h'\left(\frac{dG}{dN}\right)_i = hG_i$$

gdzie jest $h'=0$ albo $h'=1$, zaś h oznacza funkcyę ciągłą i rzeczywistą określoną wzdłuż krzywej C, która w wypadku $h'=0$ nigdzie na tej krzywej nie ma być zerem.*)

Okażemy, że powyższe warunki jednoznacznie określają funkcyę Greena, gdy parametr ξ spełnia pewne warunki. Gdyby bowiem istniały dwie takie funkcye $G(x_0 y_0 \, x y \, \xi)$ i $\Gamma(x_0 y_0 \, x y \, \xi)$, spełniające powyższe trzy warunki, to ich różnica

$$(4) \qquad \varphi = G - \Gamma = \left(G + \frac{\log \rho}{2\pi}\right) - \left(\Gamma + \frac{\log \rho}{2\pi}\right)$$

byłaby funkcyą ciągłą i spełniałaby wewnątrz obszaru D równanie

$$(5) \qquad \Delta\varphi + \xi\varphi = 0$$

może za wyjątkiem punktu P_0, a wzdłuż krzywej C czyniłaby zadość równaniu

$$(6) \qquad h'\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_i = h(\varphi)_i$$

37. Udowodnimy jednakowoż następujące twierdzenie: jeżeli funkcya φ jest ciągłą wewnątrz obszaru D i spełnia tamże równanie 5, prócz może w punkcie P_0, leżącym wewnątrz obszaru D to spełnia je także w punkcie P_0 przy jakiejkolwiek wartości parametra ξ.

Połóżmy: $\qquad (7) \qquad \varphi = u + w$

---

*) Nadto, jak zawsze, zakładamy, że granice osiągane są jednostajnie.

i punkt P_0 otoczmy kołem Σ_1 takim, iż całe leży wewnątrz obszaru D; obszar, który zamyka koło Σ_1, oznaczmy przez Δ. Przez u oznaczmy funkcyę, która wewnątrz obszaru Δ spełnia równanie

(8) $$\Delta u - m^2 u = 0$$

a gdy punkt xy będąc wewnątrz obszaru Δ zdąża nieograniczenie do koła Σ_1, to granica u_i funkcyi $u(xy)$ ma być równa wartościom funkcyi φ na kole Σ_1. Jeżeli liczba m jest rzeczywista i dodatnia i dość wielka; to według § 21 (str. 41 i nast.) to taka funkcya $u(xy)$ istnieje. Wobec tego funkcya w czyni zadość równaniu

(9) $$\Delta w - m^2 w + (m^2 + \xi)\varphi = 0$$

wewnątrz obszaru Δ, prócz może w punkcie P_0, a wzdłuż koła Σ_1 jest

(10) $$w_i = 0$$

Łatwo taką funkcyę w zbudować. Oznaczmy przez ϱ odległość dwu punktów (xy) i $(x'y')$ obszaru Δ i połóżmy:

(11) $$\psi = \frac{m^2 + \xi}{2\pi} \int_{(\Delta)} \varphi(x'y')\, f(\varrho, m)\, d\tau$$

Ponieważ z założenia funkcya φ ma pochodne drugie ciągłe napewno poza punktem P_0, przeto jej pochodne pierwsze będą ciągłe i ograniczone napewno (w sąsiedztwie dość małym każdego punktu obszaru Δ, który jest odmienny od punktu P_0, przeto na mocy § 28 (str. 55 i nast.) funkcya $\psi(xy)$ posiada pochodne drugie wewnątrz obszaru Δ może ~~poza~~ wyjąwszy punkt P_0 i tamże spełnia równanie

(12) $$\Delta\psi - m^2\psi + (m^2 + \xi)\psi = 0$$

Kładąc $w = \psi - v$ otrzymujemy, że funkcyę v można poddać następującym warunkom: niech wewnątrz obszaru Δ wszędzie spełnia równanie

(13) $$\Delta v - m^2 v = 0$$

a wzdłuż koła Σ_1 niech jest $v_i = \psi$. Wobec założenia o liczbie m można taką funkcyę zbudować. Stąd jest:

(14) $$\varphi = u + \psi - v$$

Ponieważ funkcya φ jest ciągła, a więc ograniczona w całym obszarze Δ, przeto funkcya ψ ma pochodne pierwsze ciągłe i ograniczone w całym obszarze Δ. Wskutek równości 14 ma więc funkcya φ pochodne pierwsze ciągłe i ograniczone w otoczeniu punktu P_0, ale wtedy funkcya ψ spełnia równanie 12 także w punkcie P_0; a że funkcye u i v

spełniają równania 8 względnie 13 także w punkcie P_0, przeto na mocy równości 14 wynika, że funkcya φ spełnia równanie 5 (str. 70) także w punkcie P_0, co mieliśmy udowodnić.[x)]
Twierdzenie obecne zostaje słuszne i w tym wypadku, gdy mamy skończoną ilość punktów o tej własności, co punkt P_0.
§ 38. Wracając do problemu jednoznaczności funkcyi Greena powiemy, że różnica φ dwóch funkcyi Greena (wzór 4 str. 70) obszaru D czyniłaby według § 37 w każdym punkcie bez wyjątku wewnątrz obszaru D zadość równaniu 5 (str. 70) i wzdłuż krzywej C równaniu 6 (str. 70); ale według § 32 i 33 (str. 65 i nast.) taka funkcya φ musi być identycznie równa zeru, a mianowicie ~~wedł~~ we wypadku $h'=0$, o ile parametr ξ nie jest liczbą rzeczywistą i dodatnią, a we wypadku $h'=1$, o ile parametr ξ nie jest liczbą rzeczywistą i ujemną mniejszą od pewnej skończonej granicy, zerem lub liczbą dodatnią. Wśród tych warunków na parametr ξ nie istnieją dwie różne od siebie funkcye Greena.
Zapewnijmy się teraz o istnieniu funkcyi Greena.
W tym celu połóżmy

$$(15)\qquad G(x_0y_0, xy, \xi) = \frac{1}{2\pi} f(\varrho, \mu) - u(xy)$$

gdzie ϱ oznacza odległość punktów $P(xy)$ i $P_0(x_0y_0)$, a liczba μ jest związana z wartością parametru ξ związkiem według § 3 (str. 5). Na funkcyę $u(xy)$ ~~otrzymaczy~~ nałóżmy warunek następujący (z powodu § 37 i ~~wzoru~~ pierwszego ze wzorów 10 str. 9 zupełnie zrozumiały); niech funkcya $u(xy)$ spełnia wewnątrz obszaru D równanie

$$(16)\qquad \Delta u + \xi u = 0.$$

Dla wartości $h'=0$ otrzymujemy na funkcyę Greena wzdłuż krzywej C warunek

$$(17)\qquad G_i = 0$$

który wskutek równości 15 przekształci się na następujący: niech funkcya $u(xy)$ będzie potencyałem warstwy pojedynczej, spełniającym

x) Daje się udowodnić, że funkcyę v nietylko można obrać tak, aby i w punkcie P_0 spełniała równanie 13 (str. 71), ale tak obrać trzeba. W tym celu udowadnia się nasze twierdzenie we wypadku szczególnym, gdy parametr ξ jest liczbą rzeczywistą i ujemną $(-m^2)$. — (patrz str. 182.)

wewnątrz obszaru D równanie 16, a wzdłuż krzywej C warunek:

(18) $$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{1}{2\pi} f(\varrho\mu)$$

gdzie ϱ jest odległością punktu krzywej C od punktu $x_0 y_0$. Jeżeli więc parametr spełnia nierówność 18 (str. 40), to według §19 (str. 37) taka funkcya istnieje; ze wzoru 15 (str. 72) i definicyi funkcyi u wynika, że istnieje także granica $\left(\frac{dG}{dN}\right)_i$.

We wypadku $h'=1$ warunek 3 (str. 70) przyjmuje postać

(19) $$\left(\frac{dG}{dN}\right)_i = h\, G_i$$

czyli

(20) $$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h\,u + \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{df(\varrho\mu)}{dN} - h f(\varrho\mu)\right\}$$

t. zn. funkcya $u(xy)$ ma wewnątrz obszaru D spełniać równanie 16 (str. 72), a wzdłuż krzywej C równanie 20. Jeżeli więc parametr ξ (a górna granica H modułu funkcyi h istnieje) spełnia nierówności 18 (str. 40) i 49 (str. 46), to funkcyę taką możemy utworzyć; wobec równości 15 (str. 72) i definicyi funkcyi u, jako potencyału warstwy pojedynczej wynika, że istnieje także granica $\left(\frac{dG}{dN}\right)_i$ przy obecnych warunkach na parametr ξ. W tych wypadkach więc funkcya Greena istnieć musi.

Ale można nawet ogólniejsze twierdzenie udowodnić, a mianowicie, że, ilekroć funkcya Greena istnieje, istnieje też granica pochodnej normalnej t. j. $\left(\frac{dG}{dN}\right)_i$ i jest funkcyą ciągłą — oczywiście mamy tu na myśli tylko wypadek $h'=0$, bo we wypadku $h'=1$ twierdzenie obecne byłoby bezpotrzebne.

Niech dla parametru ξ istnieje funkcya Greena $G(x_0y_0, xy, \xi)$ obszaru D i niech liczba ξ_0 będzie liczbą czyniącą zadość odpowiednim nierównościom, wskutek których, jak dopiero co wykazano, funkcya Greena istnieć musi, oznaczmy ją przez $G(x_0y_0, xy, \xi_0)$ — oczywiste, że liczba ξ_0 liczbą rzeczywistą nieujemną być nie może. Połóżmy:

$$F(xy) = G(x_0y_0, xy, \xi) - G(x_0y_0, xy, \xi_0)$$

Krótko obie funkcye Greena oznaczać będziemy $G(\xi)$ i $G(\xi_0)$. Z powodu równań

$$\Delta G(\xi) + \xi\, G(\xi) = 0\,, \quad \Delta G(\xi_0) + \xi_0\, G(\xi_0) = 0$$

spełnionych wewnątrz obszaru D za wyjątkiem punktu P_0

otrzymujemy równanie:

$$\Delta F + \xi_0 F + (\xi - \xi_0) G(\xi) = 0$$

któremu funkcya $F(xy)$ czyni zadość wewnątrz obszaru D, prócz może w punkcie P_0; nadto wzdłuż krzywej C będzie:

$$F_i = 0$$

Oznaczając przez μ_0 liczbę o części rzeczywistej dodatniej i taką, iż jest $\mu_0^2 = -\xi_0$ i kładąc

$$F(xy) = \phi(xy) - u(xy)$$

$$\phi(xy) = \frac{\xi - \xi_0}{2\pi} \int_{(D)} G(\xi) f(\varrho, \mu_0) d\tau$$

gdzie ϱ jest odległością punktu xy od dowolnego punktu obszaru D (jak wynika z definicyi funkcyi Greena, całka ta ma sens określony), możemy na funkcyę $u(xy)$ przyjąć warunki następujące: niech wewnątrz obszaru D wszędzie spełnia równanie:

$$\Delta u + \xi_0 u = 0$$

nadto wzdłuż krzywej C warunek $u_i = \phi$; funkcya taka istnieć będzie z powodu założenia na liczbę ξ_0. Funkcya ϕ ma granicę $\left(\frac{d\phi}{dN}\right)_i$ i granicę $\left(\frac{d\phi}{dN}\right)_e$ sobie równe; funkcyę $u(xy)$ możemy więc obrać jako potencyał warstwy pojedynczej ~~warstwy~~, rozpostartej wzdłuż krzywej C o liczbie charakterystycznej μ_0, który wzdłuż krzywej C spełnia warunek:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \left(\frac{d\phi}{dN}\right)_e$$

przeto jest według § 35 (str. 69) jest w obszarze D' $u \equiv \phi$ co do wartości, a stąd wskutek ciągłości obu funkcyi jest $u_i = \phi$ do czego dążyliśmy. Istnieje więc granica $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$, a stąd granica $\left(\frac{dF}{dN}\right)_i$, a że funkcya Greena $G(\xi_0)$ ma granicę pochodnej normalnej, więc i funkcya Greena $G(\xi)$ dla pochodnej normalnej granicę posiada, jeżeli tylko, jak powiedzieliśmy, ta funkcya istnieje.

Na podstawie tej własności możemy udowodnić klasyczne twierdzenie o funkcyach Greena, że jest

$$G(x_0 y_0, x_1 y_1, \xi) = G(x_1 y_1, x_0 y_0, \xi)$$

gdzie punkty $P_0(x_0 y_0)$, $P_1(x_1 y_1)$ leżą wewnątrz obszaru D. Oznaczmy dla krótkości przez $G_0(P)$ funkcyę Greena $G(x_0 y_0, xy\, \xi)$, której punkt P_0 jest ~~po~~ biegunem, przyczem punkt P ma współrzędne xy i leży w obszarze D; przez $G_1(P)$ oznaczmy funkcyę Greena $G(x_1 y_1, xy, \xi)$,

której biegunem jest punkt P_1(*); nadto w nawiasie umieszczona litera P oznacza wartość odpowiedniej funkcyi w punkcie P.
Połóżmy

$$G_0 = G_0' + iG_0'' \quad ; \quad G_1 = G_1' + iG_1''$$

gdzie już funkcye $G_0'\, G_0''\, G_1'\, G_1''$ są funkcyami rzeczywistemi.
Wzdłuż krzywej C będzie więc

$$(21)\qquad h'\left(\frac{dG_0'}{dN}\right)_i = h(G_0')_i \; ; \; h'\left(\frac{dG_0''}{dN}\right)_i = h(G_0'')_i \; ; \; h'\left(\frac{dG_1'}{dN}\right)_i = h(G_1')_i \; ; \; h'\left(\frac{dG_1''}{dN}\right)_i = h(G_1'')_i$$

nadto wewnątrz obszaru D poza punktem P_0 będzie

$$\Delta G_0' + \alpha G_0' - \beta G_0'' = 0 \quad ; \quad \Delta G_0'' + \alpha G_0'' + \beta G_0' = 0$$

zaś poza punktem P_1 będzie:

$$\Delta G_1' + \alpha G_1' - \beta G_1'' = 0 \quad ; \quad \Delta G_1'' + \alpha G_1'' + \beta G_1' = 0$$

Otoczmy punkt P_0 kołem Σ_0 o promieniu r_0, a punkt P_1 kołem Σ_1 o promieniu r_1, przyczem koła te mają leżeć oba zewnątrz siebie i nie przecinać się i obydwa mich leżą wewnątrz obszaru D. Do obszaru D'', utworzonego z obszaru D przez wycięcie obszarów zamkniętych kołami Σ_0 i Σ_1, zastosujmy kilkakrotnie twierdzenie Greena, do czego mamy prawo:

$$(22)\qquad \int_C \left(G_0'\frac{dG_1'}{dN} - G_1'\frac{dG_0'}{dN}\right)_i ds + \int_{\Sigma_0}\left(G_0'\frac{dG_1'}{dN} - G_1'\frac{dG_0'}{dN}\right) ds + \int_{\Sigma_1}\left(G_0'\frac{dG_1'}{dN} - G_1'\frac{dG_0'}{dN}\right) ds + \int_{D''}\left(G_0'\Delta G_1' - G_1'\Delta G_0'\right) d\tau = 0$$

przyczem normalną skierowaliśmy na wewnątrz obszaru D'', a więc na zewnątrz obu kół.
Pierwsza całka jest wskutek równości 21 zerem; ponieważ dalej tylko pochodne normalne funkcyi G_0' na kole Σ_0 i funkcyi G_1' na kole Σ_1 są nieciągłe, jak wyraz $\left(-\frac{1}{2\pi r_0}\right)$ względnie $\left(-\frac{1}{2\pi r_1}\right)$, więc druga całka dla lim $r_0 = 0$ dąży do wartości $G_1'(P_0)$, a trzecia całka do wartości $-G_0'(P_1)$ i równocześnie czwarta do wartości:

$$\beta\int_D \left(G_0'G_1'' - G_0''G_1'\right) d\tau$$

przeto równość 22 w granicy daje równość:

$$(23)\qquad G_1'(P_0) - G_0'(P_1) + \beta\int_{(D)} \left(G_0'G_1'' - G_0''G_1'\right) d\tau = 0$$

Podobnie otrzymamy:

$$(24)\qquad G_1''(P_0) - \beta\int_D \left(G_0'G_1' + G_0''G_1''\right) d\tau = 0$$

$$(25)\qquad G_0''(P_1) - \beta\int_D \left(G_0'G_1' + G_0''G_1''\right) d\tau = 0$$

$$(26)\qquad \beta\int_D \left(G_0'G_1'' - G_0''G_1'\right) d\tau = 0$$

Do równania 23 dodaję równanie 24 pomnożone przez i, 25 pomnożone przez $(-i)$ i 26 pomnożone przez (-1); otrzymujemy ostatecznie:

$$G_0(P_0) - G_0(P_1) = 0$$

czyli, że jest

$$G(x_1 y_1, x_0 y_0, \xi) - G(x_0 y_0, x_1 y_1, \xi) = 0$$

co mieliśmy udowodnić.

§ 39. Załóżmy, że pewna funkcya $u(xy)$ czyni wewnątrz obszaru D zadość równaniu

$$(27) \qquad \Delta u + \xi u = 0$$

a na krzywej C warunkowi

$$(28) \qquad h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \tau$$

przyczem oznaczenia h', h, τ są już znane. Załóżmy dalej, że dla parametru ξ istnieje funkcya Greena $G(x_0 y_0, xy, \xi)$ o biegunie $P_0(x_0 y_0)$, położonym wewnątrz obszaru D, przyczem funkcya ta spełnia wzdłuż krzywej C warunek

$$(29) \qquad h'\left(\frac{dG}{dN}\right)_i = h(G)_i$$

przyczem oznaczenia h', h są te same, co w równości 28.

Wykażemy, że można funkcyę $u(xy)$ wyrazić przez daną funkcyę ciągłą τ i funkcyę Greena.

A) Połóżmy najpierw $h'=1$ w równościach 28 i 29, które przyjmują postać

$$(30) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \tau \quad ; \quad \left(\frac{dG}{dN}\right)_i = h(G)_i$$

Połóżmy

$$u = P + iQ \ ; \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2 \ ; \quad G = \Gamma + iH$$

gdzie funkcye $P, Q, \tau_1, \tau_2, \Gamma, H$ są rzeczywiste i nadto wewnątrz obszaru D będą spełniane równania:

$$\Delta P + \alpha P - \beta Q = 0 \ ; \ \Delta Q + \alpha Q + \beta P = 0$$

a poza punktem P_0 wewnątrz obszaru D:

$$\Delta\Gamma + \alpha\Gamma - \beta H = 0 \ ; \ \Delta H + \alpha H + \beta\Gamma = 0$$

nadto wzdłuż krzywej C będą spełnione warunki:

$$\left(\frac{dP}{dN}\right)_i = h(P)_i + \tau_1 \ ; \ \left(\frac{dQ}{dN}\right)_i = h(Q)_i + \tau_2 \ ; \ \left(\frac{d\Gamma}{dN}\right)_i = h(\Gamma)_i \ ; \ \left(\frac{dH}{dN}\right)_i = h(H)_i$$

Do obszaru D'' powstałego z obszaru D przez wyłączenie dość małego koła Σ_0, zatoczonego na około bieguna P_0 zastosujmy twierdzenie Greena:

$$\int\limits_C \left(P\frac{d\Gamma}{dN} - \Gamma\frac{dP}{dN}\right)_i ds + \int\limits_{\Sigma_0}\left(P\frac{d\Gamma}{dN} - \Gamma\frac{dP}{dN}\right) ds + \int\limits_{D''}(P\Delta\Gamma - \Gamma\Delta P)d\tau = 0$$

przyczem normalną skierowano na wewnątrz obszaru D''.
Całka pierwsza redukuje się do całki

$$-\int\limits_C \Gamma\tau_1\, ds$$

druga, gdy promień koła Σ_0 dąży do zera, dąży do wartości do wartości funkcyi $-P$ w punkcie P_0, co oznaczymy przez $-P(P_0)$; trzecia zdąża do całki $\beta\int\limits_D(PH-\Gamma Q)d\tau$; a więc w granicy otrzymujemy równość

$$(31)\qquad -\int\limits_C \Gamma\tau_1\, ds - P(P_0) + \beta\int\limits_D(PH-\Gamma Q)d\tau = 0$$

podobnie dostaniemy:

$$(32)\qquad -\int\limits_C H\tau_1\, ds - \beta\int\limits_D(P\Gamma + HQ)d\tau = 0$$

$$(33)\qquad -\int\limits_C \Gamma\tau_2\, ds - Q(P_0) + \beta\int\limits_D(QH + P\Gamma)d\tau = 0$$

$$(34)\qquad -\int\limits_C H\tau_2\, ds + \beta\int\limits_D(PH - \Gamma Q)d\tau = 0$$

Z równań 31, 32, 33 i 34 otrzymujemy przez odpowiednią kombinacyę:

$$-\int\limits_C \tau(x'y')\, G(x_0 y_0, x'y', \xi)\, ds - u(x_0 y_0) = 0$$

a stąd otrzymujemy

$$(35)\qquad u(xy) = -\int\limits_C \tau(x'y')\, G(xy, x'y', \xi)\, ds$$

jest to równość zapowiedziana.
B) Połóżmy $h'=0$ t. j. niech funkcya $u(xy)$ spełnia wewnątrz obszaru D równanie 27 (str. 76), a na krzywej C warunek:

$$(36)\qquad u_i = \tau$$

gdzie τ jest daną funkcyą ciągłą punktu krzywej C.
Załóżmy, że dla parametru ξ istnieje funkcya Greena, która wzdłuż krzywej C spełnia warunek $G_i = 0$. Kładąc jak powyżej, $u = P + iQ$, $g = \Gamma + iH$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, gdzie funkcye $P, Q, \Gamma, H, \tau_1, \tau_2$ są funkcyami rzeczywistemi; wzdłuż krzywej C będzie zachodziły równości: $P_i = \tau$, $Q_i = \tau$, $\Gamma_i = 0$, $H_i = 0$
Niech krzywa C' będzie krzywą podobnych własnościach co krzywa C i leżącą wewnątrz obszaru D i nadto koło Σ_0 otaczające punkt P_0 i le-

ące wraz z punktem P_0 wewnątrz krzywej C'; przechodząc do granicy z kołem Σ_0, jak we wypadku A, otrzymamy:

$$\int_{C'} \{P\,\partial_{ni}(\Gamma) - \Gamma\,\partial_{ni}(P)\}\,ds - P(P_0) + \beta\int_{\Delta}(PH - \Gamma Q)\,d\tau = 0$$

$$\int_{C'} \{P\,\partial_{ni}(H) - H\,\partial_{ni}(P)\}\,ds - \beta\int_{\Delta}(P\Gamma + HQ)\,d\tau = 0$$

$$\int_{C'} \{Q\,\partial_{ni}(\Gamma) - \Gamma\,\partial_{ni}(Q)\}\,ds - Q(P_0) + \beta\int_{\Delta}(QH + P\Gamma)\,d\tau = 0$$

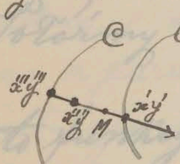
$$\int_{C'} \{Q\,\partial_{ni}(H) - H\,\partial_{ni}(Q)\}\,ds + \beta\int_{\Delta}(PH - \Gamma Q)\,d\tau = 0$$

gdzie Δ oznacza obszar zamknięty przez krzywą C'; normalna do krzywej C' jest skierowana na wewnątrz obszaru Δ.
Z tych równań otrzymujemy:

(37) $$\int_{C'} \{u(x'y')\,\partial_{ni}[G(x_0y_0, x'y', \xi)] - G(x_0y_0, x'y', \xi)\,\partial_{ni}[u(x'y')]\}\,ds - u(x_0y_0) = 0$$

Otóż, jak wiemy, funkcya Greena, jeżeli tylko istnieje, ma granicę pochodnej normalnej i osiąga ją jednostajnie; przeto $\int_{C'} u(x'y')\,\partial_{ni}[G(x_0y_0, x'y', \xi)]\,ds$ dąży do całki $\int_C \tau(x'y')\,\frac{dG(x_0y_0, x'y', \xi)}{dN}\,ds$ gdy krzywa C' zdąża do krzywej C.

Zauważmy, że jeżeli krzywa C' jest dość bliska krzywej C, to najbliższym punktu $x'y'$, znajdującego się na krzywej C' będzie jeden punkt $x''y''$, leżący na krzywej C i na jego normalnej leżeć będzie punkt $x'y'$. Na odcinku $(x'y', x''y'')$ długości δ obierzmy punkt $\bar{x}\bar{y}$, różny od punktów odcinka końcowych. Na mocy twierdzenia średniej wartości mamy:



$$G(x_0y_0, \bar{x}\bar{y}, \xi) - G(x_0y_0, x''y'', \xi) = \partial_{ni}[G(x_0y_0, x_M y_M, \xi)]\cdot\delta'$$

gdzie x_M, y_M są to współrzędne pewnego pośredniego punktu M, zaś δ' jest długością odcinka $(x''y'', \bar{x}\bar{y})$. Załóżmy, że punkt $(\bar{x}\bar{y})$ zdąża do punktu (xy), widzimy, że wartość $G(x_0y_0\,x''y'', \xi)$ zdąża do zera, liczba δ' do liczby δ i przeto pochodna $\partial_{ni}[G(x_0y_0, x_M y_M, \xi)]$ musi zdążać do określonej wartości, w ten sposób, iż punkt M zdąża do określonego punktu N, przeto jest na krzywej C'

$$G(x_0y_0, x'y', \xi) = \partial_{ni}[G(x_0y_0, x_N y_N, \xi)]\cdot\delta$$

Można więc wyznaczyć liczbę dodatnią A taką, iż wzdłuż krzywej C' i to niezależnie od położenia punktu $x'y'$, gdy tylko

krzywa C' jest dość blisko krzywej C, jest także

$$\left|G(x_0 y_0, x'y', \xi)\right| < A\delta',$$

Wobec tego jest ~~jest~~ wzdłuż krzywej C'

$$\left|G(x_0 y_0, x'y', \xi)\cdot \partial_{ni}[u(x'y')]\right| < A.\left|\delta.\partial_{ni} u(x'y')\right|$$

Otóż, gdy parametr ξ czyni zadość nierówności 18 (str. 40), to wiemy według § 21 (str. 41), że funkcya $u(xy)$ o powyżej zacytowanych własnościach istnieje, że można ją wyrazić za potencyał warstwy podwójnej, rozpostartej wzdłuż krzywej C z gęstością ciągłą, ale wtedy na mocy równości 29 (str. 24) będzie jednostajnie wzdłuż krzywej C

$$\lim_{\delta=0}\left[\delta.\partial_{ni} u(x'y')\right] = 0$$

Przy takim parametrze ξ mielibyśmy z równości 37 (str. 78), zmieniając nieco oznaczenia,

$$(38) \qquad u(xy) = \int_C \tau(x'y')\left(\frac{dG(xy, x'y', \xi)}{dN}\right)_i ds$$

Niech teraz parametr ξ ~~będzie ma~~ jakąkolwiek wartość, zaś liczba ξ_0 spełnia warunki 18 (str. 40); przeto można wyznaczyć tak potencyał warstwy podwójnej v, rozpostartej wzdłuż krzywej C, iż wewnątrz obszaru D jest

$$\Delta v + \xi_0 v = 0$$

wzdłuż krzywej C jest

$$v_i = \tau$$

i zarazem będzie jednostajnie wzdłuż krzywej C:

$$\lim_{\delta=0}\left[\delta.\partial_{ni}(v)\right] = 0$$

Połóżmy

$$u = v + F$$

to funkcya F spełnia wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta F + \xi_0 F + (\xi - \xi_0)F = 0$$

a wzdłuż krzywej C warunek:

$$F_i = 0$$

Połóżmy więc

$$F = \phi - w$$

$$\phi(xy) = \frac{\xi-\xi_0}{2\pi}\int_D u(x'y')\, f(\varrho, \mu_0)\, dz$$

to ponieważ funkcya ϕ spełnia wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta\phi + \xi_0\phi + (\xi - \xi_0)u = 0$$

gdzie ρ jest odległością punktów (xy) i $(x'y')$, zaś $\mu_0^2 = -\xi_0$ i nadto liczba $\rho\mu_0$ ma mieć część rzeczywistą dodatnią. Dla funkcyi w otrzymamy równanie $\Delta w + \xi_0 w = 0$, które ma być spełnione wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$, nadto wzdłuż krzywej C ma być $w_i = \phi$; jak wiemy, możemy w uważać za potencyał pewnej warstwy podwójnej f, rozpostartej wzdłuż krzywej C. Otóż ostatecznie jest $u = v + \phi - w$; ponieważ funkcya $u(xy)$ jest ograniczona, więc istnieje granica $\left(\frac{d\phi}{dN}\right)_i$ skończona, tedy jest

$$\lim_{\delta=0}\left[\delta . \mathfrak{D}_{ni}(u)\right] = 0$$

i w tym wypadku; ale stąd z równości 37 wynika znowu równość 38 (str. 79).

§40. Oznaczmy przez $W(xy)$ spełniającą wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$ równanie

$$(38) \qquad \Delta W + \xi W + F(xy) = 0$$

w punkcie xy, gdzie funkcya $F(xy)$ ma być funkcyą ciągłą określoną w obszarze $\mathfrak{D}$, nadto wzdłuż krzywej C ma być

$$(39) \qquad h'\left(\frac{dW}{dN}\right)_i = h(W)_i$$

gdzie oznaczenia h', h są stale te same, co dawniej.

Załóżmy, że ta funkcya $W(xy)$ i funkcya Greena odpowiednia istnieje; jeżeli połóżymy

$$(40) \qquad W(xy) = \phi(xy) - u(xy)$$

$$(41) \qquad \phi(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\, f(\xi,\mu)\, d\tau$$

gdzie ρ oznacza odległość punktów (xy) i $(x'y')$, liczba μ jest związana z parametrem ξ według §3 (str. 5), to ostatecznie zakładamy, że istnieje funkcya $u(xy)$, która spełnia wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$ równanie

$$(42) \qquad \Delta u + \xi u = 0$$

a wzdłuż krzywej C warunek:

$$(43) \qquad h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \left(h'\frac{d\phi}{dN} - h\phi\right)$$

nadto pamiętać trzeba, że funkcya $F(xy)$ była taka, iżby funkcya $\phi(xy)$ miała drugie pochodne ciągłe: $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$ wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$.

Postaramy się funkcyę $W(xy)$ wyrazić przez funkcyę Greena i funkcyę $F(xy)$.

A) Niech jest najpierw $h'=0$; wtedy równość 43 (str. 80) przyjmie postać $u_i=\phi$; kładąc $\tau(x'y')\equiv\phi(x'y')$ otrzymujemy z równości 38 (str. 79)

$$(44)\qquad u(xy)=\int_{(C)}\phi(x'y')\left(\frac{dG(xy,x'y',\xi)}{dN}\right)_i ds$$

co na mocy wzoru 41 (str. 80) przyjmie postać:

$$(45)\qquad u(xy)=\frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\left(\frac{dG(xy,x'y',\xi)}{dN}\right)_i\left(\int_{D}F(x''y'')f(\varsigma,\mu)\,d\tau\right)ds$$

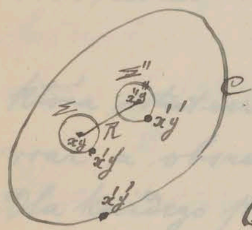
przyczem obecnie liczba ς mierzy odległość odcinka, łączącego punkt $(x'y')$ położony na krzywej C z dowolnym punktem $(x''y'')$ obszaru D, a więc funkcya $f(\varsigma,\mu)$ od obu punktów zależy.
Poniżej wykażemy, że można porządek całkowania zmienić we wzorze 45, przeto będzie

$$(46)\qquad u(xy)=\frac{1}{2\pi}\int_{(D)}F(x''y'')\,d\tau\int_{C}\left(\frac{dG(xy,x'y',\xi)}{dN}\right)_i f(\varsigma\mu)\,ds$$

Aby wyrażenie prawej strony przekształcić, obliczmy wartość całki

$$(47)\qquad \psi(x''y'',xy)=\int_{C}\left(\frac{dG(xy,x'y',\xi)}{dN}\right)_i f(\varsigma\mu)\,ds.$$

Otoczmy punkty (xy) i $(x''y'')$ kołami Σ_1, względnie Σ'' o promieniach takich, by oba koła leżały wewnątrz obszaru D i zewnątrz siebie nie przecinając się. Długość odcinka łączącego punkty (xy) i $(x''y'')$ oznaczymy przez π, a przez ρ odległość punktu $x''y''$ od punktów krzywych C, Σ_1 i Σ''.



Dla krzywych tych daje twierdzenie Greena (str. 44, wzór 55)

$$0=\int_{(C)}\left(\frac{dG(xy,x'y',\xi)}{dN}\right)_i f(\varsigma,\mu)\,ds+\int_{\Sigma_1}\frac{dG(xy,x'y',\xi)}{dN}f(\varsigma\mu)\,ds+\int_{\Sigma''}\frac{dG(xy,x'y',\xi)}{dN}f(\varsigma\mu)\,ds$$
$$-\int_{(C)}G_i(xy,x'y',\xi)\frac{df(\varsigma\mu)}{dN}ds-\int_{\Sigma_1}G(xy,x'y',\xi)\frac{df(\varsigma\mu)}{dN}ds-\int_{\Sigma''}G(xy,x'y',\xi)\frac{df(\varsigma\mu)}{dN}ds$$

gdzie $x'y'$ są współrzędnemi punktów krzywych C, Σ_1 i Σ'', nadto normalna skierowana na wewnątrz obszaru, który te krzywe zamykają.
Pierwsza całka strony prawej jest właśnie całką $\psi(x''y'',xy)$, druga dąży do wartości $[-f(\pi,\mu)]$, gdy koło Σ_1 ściąga się do punktu (xy); trzecia dąży do zera, gdy koło Σ'' ściąga się do punktu $(x''y'')$; czwarta ma stale wartość zeru równą, bo w obecnym wypadku jest wzdłuż krzywej C stale $G_i=0$; piąta zdąża do zera,

gdy koło Σ_i ściąga się do punktu xy, zaś szósta całka zdąża do wartości $[-2\pi\, G(xy, x''y'', \xi)]$. Wskutek tego otrzymujemy:

$$0 = \psi(x''y'', xy) - f(R, \mu) + 2\pi\, G(xy, x''y'', \xi)$$

a na mocy wzorów 46 i 47 (str 82) otrzymujemy:

$$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D)} F(x''y'')\, f(R\mu)\, d\tau - \int_{D} F(x''y'')\, G(xy, x''y'', \xi)\, d\tau$$

czyli

$$u(xy) = \phi(xy) - \int_{D} F(x''y'')\, G(xy, x''y'', \xi)\, d\tau$$

stąd i z równości 40 (str 80) wnosimy, że jest

$$(48)\qquad W(xy) = \int_{(D)} F(x'y')\cdot G(xy, x'y', \xi)\, d\tau$$

jest to równość, o której wyprowadzenie nam chodziło.
Dla wykończenia tego przypadku winniśmy wykazać, że wolno było powyżej zmienić porządek całkowania w całce podwójnej, której elementy stają się nieograniczone.
W tym celu rozdzielmy obszar D na dwie części Δ' i Δ'', gdzie Δ' będzie zbiorem tych punktów obszaru D, których odległość od krzywej C wynosi więcej, niż liczba dodatnia δ, która jest taka, iż punkt xy leży wewnątrz obszaru Δ'; przez Δ'' oznaczamy obszar pozostały z obszaru D. Przeto jest:

$$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_{C}\left(\frac{dG(xy, x'y', \xi)}{dN}\right)_i ds \cdot \left\{\int_{\Delta'} F(x''y'')\, f(\varsigma,\mu)\, d\tau + \int_{\Delta''} F(x''y'')\, f(\varsigma,\mu)\, d\tau\right\}$$

Otóż całka

$$\int_{\Delta''} F(x''y'')\, f(\varsigma\mu)\, d\tau$$

która ostatecznie zależy od położenia punktu $x'y'$ na krzywej C, zdąża wraz z obszarem Δ'', jak wiemy, do zera i, jak łatwo się przekonać, dla każdego punktu $x'y'$ krzywej C jednostajnie; ponieważ w całce

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C}\left(\frac{dG(xy, x'y', \xi)}{dN}\right)_i ds \int_{\Delta'} F(x''y'')\, f(\varsigma\mu)\, d\tau$$

funkcye podcałkowe i obszary całkowania są skończone i ograniczone, więc wolno zmienić porządek całkowania, a więc jest:

$$u(xy) - \frac{1}{2\pi}\int_{(D)} F(x''y'')\, d\tau \int_{C}\left(\frac{dG(xy, x'y', \xi)}{dN}\right)_i f(\varsigma\mu)\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{(C)}\left(\frac{dG(xy, x'y', \xi)}{dN}\right)_i ds \int_{\Delta''} F(x''y'')\, f(\varsigma\mu)\, d\tau$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta''} F(x''y'')\, d\tau \int_{C}\left(\frac{dG(xy, x'y', \xi)}{dN}\right)_i f(\varsigma\mu)\, ds$$

ponieważ funkcya $\left(\frac{dG(xy, x'y', \xi)}{dN}\right)_i$ wzdłuż krzywej C jest ograniczona, a punkt xy leży w obszarze Δ', przeto strona prawa z obszarem Δ'' dąży do zera,

kiedy strona prawa od tego przejścia granicznego nie zależy, ponieważ strona prawa wprost jest czyli jest:

$$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_{D} F(\bar{x}\bar{y})\,d\tau \int_{C} \left(\frac{dG(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)}{dN}\right)_i f(\xi\mu)\,d\tau$$

c. b. d. u.

B) Przejdźmy do wypadku $h'=1$, wskutek tego warunek 43 (str. 80) przyjmie postać:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \left(\frac{d\phi}{dN} - h\phi\right)$$

jeżeli więc położymy

$$\tau = \frac{d\phi}{dN} - h\phi$$

to nam do funkcyi $u(xy)$ wolno stosować wzór 35 (str. 77) t. j. będzie:

(49) $$u(xy) = -\int\left(\frac{d\phi}{dN} - h\phi\right) G_i(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\,ds$$

gdzie znów według wzoru 41 (str. 80) będzie:

(50) $$\phi(\acute{x}\acute{y}) = \frac{1}{2\pi}\int_{D} F(\bar{x}\bar{y}) f(\xi,\mu)\,d\tau$$

przyczem ρ oznacza odległość punktów $(\acute{x}\acute{y})$ i $(\bar{x}\bar{y})$. Jak wiemy z § 27 (str. 50 i nast.) jest:

(51) $$\frac{d\phi}{dN} = \frac{1}{2\pi}\int_{D} F(\bar{x}\bar{y}) \frac{df(\xi\mu)}{dN}\,d\tau$$

Z tej równości i równości 49 i 50 wynika, że jest:

$$u(xy) = -\frac{1}{2\pi}\int_{C} G_i(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\,ds \int_{D} F(\bar{x}\bar{y}) \frac{df(\xi\mu)}{dN}\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{C} h(\acute{x}\acute{y})\,G_i(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\,ds \int_{D} F(\bar{x}\bar{y}) f(\xi\mu)\,d\tau$$

Sposobem podobnym, co w przypadku A, można wykazać, że w obu całkach strony prawej można zmienić porządek całkowania tak, iż będzie:

(52):
$$u(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_{D} F(\bar{x}\bar{y})\,d\tau \left[\int_{C} h(\acute{x}\acute{y})\,G_i(xy,\acute{x}\acute{y},\xi) f(\xi\mu)\,ds - \int_{C} G_i(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\frac{df(\xi\mu)}{dN}\,ds\right]$$

Dla przekształcenia wyzów będących na stronie prawej w nawiasie otoczmy punkty (xy) i $(\bar{x}\bar{y})$ kołami Σ, względnie Σ'' takiemi, że oba koła całkowicie leżą wewnątrz obszaru D, a zewnątrz siebie i do tych krzywych (C, Σ i Σ'') stosujmy twierdzenie Greena. Niech ρ oznacza odległość punktu $\bar{x}\bar{y}$ od punktów $\acute{x}\acute{y}$, położonych na krzywej C lub kołach Σ i Σ''; otrzymujemy:

$$0 = \int_{(C)}\left(\frac{dG(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)}{dN}\right)_i f(\xi\mu)\,ds + \int_{(\Sigma)}\left(\frac{dG(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)}{dN}\right)_i f(\rho\mu)\,ds + \int_{(\Sigma'')}\left(\frac{dG(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)}{dN}\right)_i f(\xi\mu)\,ds$$

$$-\int_{(C)} G_i(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\frac{df(\xi\mu)}{dN}\,ds - \int_{(\Sigma)} G_i(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\frac{df(\xi\mu)}{dN}\,ds - \int_{(\Sigma'')} G_i(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\frac{df(\xi\mu)}{dN}\,ds$$

przyczem normalną skierowano na wewnątrz obszaru, który krzywe te ograniczają.
Niech teraz koło Σ_1 ściąga się do punktu xy, a koło Σ'' do punktu $\acute{x}\acute{y}$. Ponieważ na krzywej C zachodzi równość

$$\left(\frac{dG(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)}{dN}\right)=h(\acute{x}\acute{y})\,G_i(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)$$

więc pierwsza całka strony prawej jest identyczna z pierwszym wyrazem nawiasu we wzorze 52 (str 83), i jeżeli odległość punktów (xy) i $(\acute{x}\acute{y})$ oznaczymy przez R, to druga całka dąży do wartości $[-f(R,\mu)]$, trzecia dąży do zera, czwarta jest drugim wyrazem nawiasu we wzorze 52, piąta dąży do zera, kiedy szósta na mocy drugiej z równości 10 (str 9) dąży do wartości $-2\pi G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)$; wskutek tego oba wyrazy nawiasu we wzorze 52 równają się wyrażeniu:

$$f(R,\mu)-2\pi G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)$$

przeto jest:

$$u(xy)=\frac{1}{2\pi}\int F(\acute{x}\acute{y})f(R,\mu)\,d\tau-\int F(\acute{x}\acute{y})G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\,d\tau$$

i z tych samych powodów, jak we wypadku A będzie tu:

(53) $$W(xy)=\int_{(D)}F(\acute{x}\acute{y})\,G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\,d\tau$$

Ostatecznie możemy obecny rezultat sformułować w ten sposób: Jeżeli funkcya $W(xy)$ czyni zadość równaniu 38 (str 80) wewnątrz obszaru D, a wzdłuż krzywej C równaniu 39 (str 80), to przy pewnych warunkach teoretyczno funkcyjnych na funkcyę $F(xy)$, funkcya $W(xy)$ wyrazi się przez funkcyę $F(xy)$ i funkcyę Greena $G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)$, o ile ta ostatnia istnieje, wzorem 53.

§41. Ze wzoru 53 możemy skorzystać w tym celu, aby znaleźć górną granicę modułu funkcyi $W(xy)$ w całym obszarze D. Na mocy znanego twierdzenia Schwarza otrzymujemy:

(54) $$\left|W(xy)\right|^2\leq\int_{(D)}\left|F(\acute{x}\acute{y})\right|^2d\tau\int_{(D)}\left|G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\right|^2d\tau$$

o ile tylko druga całka strony prawej będzie miała sens, bo całka pierwsza ma znaczenie określone z powodu własności funkcyi $F(xy)$, ale łatwo wykazać, że druga całka strony prawej ma sens określony. Chcąc więc zagadnienie obecne rozwiązać, trzeba znaleźć górną granicę dla funkcyi

(55) $$I(xy)=\int_{(D)}\left|G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\right|^2d\tau$$

Połóżmy $\xi = \alpha + i\beta$, $G(xy, x'y', \xi) = G_1(xy, x'y', \xi) + i G_2(xy, x'y', \xi)$
gdzie już funkcye $G_1(xy, x'y', \xi)$, $G_2(xy, x'y', \xi)$ są już rzeczywiste; funkcya $G_2(x'y', x'y', \xi)$ spełnia wewnątrz obszaru D jako funkcya zmiennych $(x'y')$ pro za punktem (xy) równanie:

$$\Delta G_2(xy, x'y', \xi) + \alpha G_2(xy, x'y', \xi) + \beta G_1(xy, x'y', \xi) = 0$$

co umyślnie napiszemy w formie:

$$\Delta G_2(xy, x'y', \xi) + \xi G_2(xy, x'y', \xi) + \beta\left[G_1(xy, x'y', \xi) - i G_2(xy, x'y', \xi)\right] = 0$$

równanie to przyjmie postać:

(56) $$\Delta\varphi(x'y') + \xi\varphi(x'y') + G_1(xy, x'y', \xi) - i G_2(xy, x'y', \xi) = 0$$

jeżeli połóżymy

(57) $$G_2(xy, x'y', \xi) = \beta\varphi(x'y')$$

Punkty (xy) i $(x'y')$ otoczmy kołami Σ_1 względnie Σ' takiemi, by leżały wewnątrz obszaru D i zewnątrz siebie i przez Δ oznaczmy obszar utworzony z obszaru D przez wyłączenie obszarów wewnętrznych obu kół Σ_1 i Σ', skierujmy normalną do krzywych C, Σ i Σ' na zewnątrz obszaru Δ i oznaczmy przez $x''y''$ punkt bieżący obszaru Δ, względnie krzywych C, Σ_1 i Σ'. Z twierdzenia Greena otrzymujemy:

$$\int_{(C+\Sigma+\Sigma')} \left\{ G_1(xy, x''y'', \xi) \frac{dG_2(x'y', x''y'', \xi)}{dN} - G_2(x'y', x''y'', \xi) \frac{dG_1(xy, x''y'', \xi)}{dN} \right\} ds +$$
$$+ \int_{(\Delta)} \left\{ G_1(xy, x''y'', \xi)\, \Delta G_2(x'y', x''y'', \xi) - G_2(x'y', x''y'', \xi)\, \Delta G_1(xy, x''y'', \xi) \right\} d\tau = 0$$

Całka, odnosząca się do krzywej C tak w wypadku $h' = 0$ jak i w wypadku $h' = 1$ ma wartość zero; całki, odnosiące do kół Σ_1 i Σ', gdy koła ~~te~~ ściągają się do swych punktów środkowych dążą do jednego wyrazu $G_2(xy, x'y', \xi)$, całka zaś powierzchniowa dąży do wartości

$$-\beta \int_{(D)} \left\{ G_1(xy, x''y'', \xi)\, G_1(x'y', x''y'', \xi) + G_2(xy, x''y'', \xi)\, G_2(x'y', x''y'', \xi) \right\} d\tau$$

taką, iż otrzymujemy:

(58) $$G_2(xy, x'y', \xi) - \beta \int_{(D)} \left\{ G_1(xy, x''y'', \xi)\, G_1(x'y', x''y'', \xi) + G_2(xy, x''y'', \xi)\, G_2(x'y', x''y'', \xi) \right\} d\tau = 0$$

Podobnie otrzymamy:

(59) $$\beta \int_{(D)} \left\{ G_1(xy, x''y'', \xi)\, G_2(x'y', x''y'', \xi) - G_1(x'y', x''y'', \xi)\, G_2(xy, x''y'', \xi) \right\} d\tau = 0$$

Mnożąc równanie 59 przez liczbę $(-i)$ i dodając do równania 58, otrzy-

mamy na mocy równania 57 równość:

$$(60) \qquad \varphi(x'y') = \int_{(D)} [G_1(xy, x''y'', \xi) - i\, G_2(xy, x''y'', \xi)]\, G(x'y', x''y'', \xi)\, d\tau$$

Wobec tego jest:

$$(61) \qquad \dot{I}(xy) = \varphi(xy)$$

dlatego mamy znaleźć górną granicę modułu funkcyi $\varphi(xy)$ wewnątrz obszaru D. Aby to uskutecznić, trzeba będzie funkcyę $\varphi(x'y')$ wyrazić w odmiennej formie.

Niech ρ będzie odległością punktu $(x'y')$ od bieżącego punktu $(x''y'')$ i przyjmując te same konstrukcye geometryczne i oznaczenia stosujemy twierdzenie Greena do funkcyi $f_1(\xi\mu)$ i $G_2(xy, x''y'', \xi)$ gdzie położyliśmy

$$f(\xi,\mu) = f_1(\xi,\mu) + i f_2(\xi,\mu)$$

przyczem funkcye $f_1(\xi,\mu)$ i $f_2(\xi,\mu)$ są rzeczywiste.

Otrzymujemy:

$$\int_{(C+\Sigma+\Sigma')} \left\{ f_1(\xi\mu) \frac{dG_2(xy, x''y'', \xi)}{dN} - G_2(xy, x''y'', \xi) \frac{df_1(\xi\mu)}{dN} \right\} ds + \\ + \int_{(\Delta)} \left\{ f_1(\xi\mu)\, \Delta G_2(xy, x''y'', \xi) - G_2(xy, x''y'', \xi)\, \Delta f_1(\xi\mu) \right\} d\tau = 0$$

Podobnie będzie

$$\int_{(C+\Sigma+\Sigma')} \left\{ f_2(\xi\mu) \frac{dG_2(xy, x''y'', \xi)}{dN} - G_2(xy, x''y'', \xi) \frac{df_2(\xi\mu)}{dN} \right\} ds + \\ + \int_{\Delta} \left\{ f_2(\xi\mu)\, \Delta G_2(xy, x''y'', \xi) - G_2(xy, x''y'', \xi)\, \Delta f_2(\xi\mu) \right\} d\tau = 0$$

a z obu ostatnich równości otrzymujemy:

$$\int_{(C+\Sigma+\Sigma')} \left\{ f(\xi\mu) \frac{dG_2(xy, x''y'', \xi)}{dN} - G_2(xy, x''y'', \xi) \frac{df(\xi\mu)}{dN} \right\} ds + \\ + \int_{\Delta} \left\{ f(\xi\mu)\, \Delta G_2(xy, x''y'', \xi) - G_2(xy, x''y'', \xi)\, \Delta f(\xi\mu) \right\} d\tau = 0$$

Jeżeli koła Σ i Σ' ściągniemy do punktów środkowych, to otrzymujemy:

$$\int_{(C)} f(\xi\mu) \left(\frac{dG_2(xy, x''y'', \xi)}{dN} \right)_i ds - \int_{C} \left(G_2(xy, x''y'', \xi) \right)_i \frac{df(\xi\mu)}{dN} ds + 2\pi\, G_2(xy, x'y', \xi) - \\ - \beta \int_{(D)} \left\{ G_1(xy, x''y'', \xi) - i\, G_2(xy, x''y'', \xi) \right\} f(\xi\mu)\, d\tau = 0$$

a stąd jest

$$(62) \qquad \varphi(x'y') = \frac{1}{2\pi} \int_{C} \varphi_i(x''y'') \frac{df(\xi\mu)}{dN} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{C} \left(\frac{d\varphi(x''y'')}{dN} \right)_i f(\xi\mu)\, ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \left\{ G_1(xy, x''y'', \xi) - i\, G_2(xy, x''y'', \xi) \right\} f(\xi\mu)\, d\tau$$

Zrobiliśmy tu milczące założenie, iż parametr ξ jest taki, iż część rzeczywista liczby μ jest dodatnia.

Rozróżnimy obecnie dwa wypadki.

A) Uważajmy wypadek, w którym jest $h'=0$; wtedy funkcya Greena wzdłuż krzywej C spełnia równość $G_i(xy, x''y'', \xi)=0$, a więc jest także $\varphi_i(x''y'')=0$; przeto pierwsza z całek strony prawej z równości 62 jest zerem i funkcyę $\varphi(x'y')$ można przedstawić w formie:

(63) $$\varphi(x'y') = u(x'y') - v(x'y')$$

gdzie jest

(64) $$u(x'y') = \frac{1}{2\pi}\int_D \left\{ G_1(xy, x''y'', \xi) - i G_2(xy, x''y'', \xi) \right\} f(\rho,\mu)\, d\tau$$

(65) $$v(x'y') = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\frac{d\varphi(x''y'')}{dn}\right)_i f(\rho,\mu)\, ds$$

przyczem, powtarzamy, ρ oznacza odległość punktu $(x'y')$ od bieżącego punktu $(x''y'')$. Ze wzoru 64 otrzymujemy:

$$|2\pi u(x'y')| \le \int_D |G(xy, x''y'', \xi)|\,|f(\rho,\mu)|\, d\tau \le \sqrt{\int_D |G(xy, x''y'', \xi)|^2 d\tau \cdot \int_D |f(\rho\mu)|^2 d\tau}$$

Otóż jest

$$\int_{(D)} |f(\rho,\mu)|^2 d\tau < \int_{D+D'} |f(\rho,\mu)|^2 d\tau$$

Jeżeli, jak zwykle, przez a oznaczymy część rzeczywistą liczby μ (jak wiemy liczba a jest dodatnia), to jest

$$|f(\rho,\mu)| \le \int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{\rho^2+t^2}}}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\, dt$$

a stąd jest

$$|f(\rho,\mu)|^2 \le \int_0^\infty e^{-2a\sqrt{\rho^2+t^2}} dt \int_0^\infty \frac{dt}{\rho^2+t^2} < \int_0^\infty e^{-a(\rho+t)} dt \cdot \int_0^\infty \frac{dt}{\rho^2+t^2} = \frac{\pi}{2a\rho} e^{-a\rho}$$

wskutek tego jest

$$\int_{(D+D')} |f(\rho,\mu)|^2 d\tau < \frac{\pi}{2a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-a\rho} d\rho = \frac{\pi^2}{a^2}$$

a więc ostatecznie jest

(66) $$|u(x'y')| < \frac{1}{2a}\sqrt{I(xy)}$$

jakiekolwiek położenie mają punkty (xy) i $(x'y')$ wewnątrz obszaru D. Wzdłuż krzywej C jest, jak wiemy, $\varphi_i(x''y'')=0$, a że funkcya $v(x'y')$ jest potencyałem warstwy pojedynczej przeto ma granicę $v_i(x''y'')$ x) wzdłuż krzywej C, a więc na mocy równości 63 istnieć będzie granica $u_i(x''y'')$ i według równości 66 będzie

(67) $$|u_i(x''y'')| \le \frac{1}{2a}\sqrt{I(xy)}$$

jakiekolwiek położenie ma punkt $(x''y'')$ na krzywej C; zarazem także będzie

(68) $$v_i(x''y'') = u_i(x''y'')$$

x) p. str. 90

Uważajmy potencyał podwójnej warstwy, rozpostartej wzdłuż krzywej C, spełniający wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta v + \xi v = 0$$

a wzdłuż krzywej C warunek 68 (str 88). Jeżeli założymy, że parametr ξ spełnia nierówność 18 (str 40), to potencyał v istnieje i można doń stosować nierówność 37 (str 43) przy uwzględnieniu nierówności 67 i tej okoliczności, że jest $a = \sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}$, gdy położymy $\xi = \rho_1(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$. Będziemy mieli

$$(69) \qquad |v| < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 1\right)\frac{\sqrt{I(xy)}}{2\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

Z nierówności 66 i 69 otrzymujemy

$$\dot{I}(xy) < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 1\right)\frac{\sqrt{I(xy)}}{2\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\sqrt{I(xy)}}{2\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

a stąd

$$(70) \qquad \dot{I}(xy) < \left(\frac{2c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 1\right)^2 \cdot \frac{1}{\rho_1\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

przy jakiemkolwiek położeniu punktu (xy) wewnątrz obszaru D.[x]

B) Niech obecnie jest:

$$h' = 1$$

w tym wypadku wzdłuż krzywej C będzie zachodziła równość:

$$\left(\frac{d\varphi(x''y'')}{dN}\right)_i = h(x''y'')\,\varphi_i(x''y'')$$

i wobec tego z równości 62 (str 86) otrzymujemy:

$$(71) \qquad \varphi(x'y') = \frac{1}{2\pi}\int_C \varphi_i(x''y'')\frac{df(\varrho\mu)}{dN}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_C h(x''y'')\,\varphi_i(x''y'')\,f(\varrho\mu)\,ds +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{(D)}\left\{G_1(xy, x''y'', \xi) - iG_2(xy, x''y'', \xi)\right\} f(\varrho\mu)\,ds$$

Otóż ostatnia całka strony prawej jest identyczna z funkcyą $u(x'y')$, ~~przy~~ w wypadku A (str 87), przeto można powtórzyć ten sam rachunek jeszcze raz; jeżeli położymy znów

$$\xi = \rho_1(\cos\theta + i\sin\theta)$$

to będzie według § 3 (str 5) $\quad a = \sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}\quad$ i jest

$$(72) \qquad \left|\frac{1}{2\pi}\int\left\{G_1(xy, x''y'', \xi) - iG_2(xy, x''y'', \xi)\right\} f(\varrho\mu)\,ds\right| < \frac{\sqrt{I(xy)}}{2\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

---

x) p. str 90

jakiekolwiek położenia mają punkty $(x'y')$ i (xy) wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$.
Ponieważ całki pierwsza i druga strony prawej w równości 71 (str. 88) są potencyałami warstwy podwójnej, względnie pojedynczej, więc, chcąc znaleźć górne granice tych potencyałów, musimy znaleźć górne granice ich gęstości na krzywej $\mathfrak{C}$.
Funkcya $\varphi_i(x''y'')$ jako ciągła osiąga maximum M swego modułu co najmniej raz w pewnym punkcie $(x''_1y''_1)$ krzywej $\mathfrak{C}$; przeto jest

$$\frac{|\varphi_i(x''_1 y''_1)|}{M} = 1$$

Pierwszą całkę strony prawej oznaczmy przez $w(x'y')$ i załóżmy, że punkt $(x'y')$ zdąża do punktu $(x''_1 y''_1)$, przeto na mocy tej uwagi, że funkcya $\pm w(x'y')$ jest potencyałem warstwy podwójnej o gęstości $+\varphi_i(x''y'')$. Na mocy równości pierwszej z równości 23 (str. 20) otrzymujemy:

$$w_i(x''_1 y''_1) = \frac{\varphi_i(x''_1 y''_1)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}} \varphi_i(x''y'')\frac{df(r,\mu)}{dN}ds$$

gdzie r oznacza odległość punktu $(x''_1 y''_1)$ od dowolnego innego punktu krzywej $\mathfrak{C}$.
Ponieważ druga i trzecia całka prawej strony równości 71 (str. 88) są funkcyami ciągłemi, przeto otrzymamy:

$$(73)\quad \frac{1}{2}\varphi_i(x''_1 y''_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}} \varphi_i(x''y'')\frac{df(r\mu)}{dN}ds - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}} h(x''y'')\varphi_i(x''y'')f(r,\mu)ds +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{D}}\left[\mathcal{G}_1(xy,x''_1y''_1,\xi) - i\mathcal{G}_2(xy,x''_1y''_1,\xi)\right]f(r\mu)\,d\tau$$

Na całkę pierwszą strony prawej mogę napisać nierówność podobną do nierówności 38 (str. 33), a do całki drugiej stosować nierówność 34 (str. 32); jeżeli przez H oznaczymy maximum modułu funkcyi $h(x''y'')$ wzdłuż krzywej $\mathfrak{C}$, to otrzymujemy nierówności:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}} \varphi_i(x''y'')\frac{df(r\mu)}{dN}ds\right| < \frac{cM}{2\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}} h(x''y'')\varphi_i(x''y'')f(r,\mu)ds\right| < \frac{HMc}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

więc istnieją liczby zespolone η, η', których moduły są mniejsze od jedności i takie, że z równości 73 otrzymujemy:

$$\varphi(x''_1,y''_1)\left\{\frac{1}{2} + \frac{\eta c}{2\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\eta' Hc}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{D}}\left\{\mathcal{G}_1(xy,x''_1y''_1,\xi) - i\mathcal{G}_2(xy,x''_1y''_1,\xi)\right\}f(r\mu)\,d\tau$$

Jeżeli przyjmiemy, że parametr ξ spełnia nietylko nierówność 18 (str. 40) ale także nierówność 49 (str. 46) to mamy w każdym razie:

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{\eta c}{2\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\eta' Hc}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\right| \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

wskutek tego jest
$$M \leq 8 \left| \frac{1}{2\pi} \int \{ g_1(xy, \overset{D}{x}''y''\xi) - i\, g_2(xy, x''y''\xi) \} f(\vartheta\, \mu)\, d\tau \right|$$
co wskutek nierówności 72 (str. 88) pociąga za sobą nierówność:
$$M < \frac{4}{\sqrt{\rho_1}\, \sin\frac{\theta}{2}} \sqrt{\dot{I}(xy)}$$
a więc wzdłuż krzywej C w dowolnym punkcie $(x''y'')$ zachodzi nierówność
$$|\varphi_i(x''y'')| \leq M < \frac{4}{\sqrt{\rho_1}\, \sin\frac{\theta}{2}} \sqrt{\dot{I}(xy)}$$
Obecnie możemy obliczyć górną granicę funkcyi $\varphi(x'y')$ w dowolnym punkcie wewnątrz obszaru D, trzeba stosować nierówności 34 (str. 32) 40 (str. 33) i 72 (str. 88); będzie przeto w punkcie (xy) wewnątrz obszaru D:
$$\dot{I}(xy) = \varphi(xy) < \left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \right) \frac{4c}{\sqrt{\rho_1}\,\sin\frac{\theta}{2}} \sqrt{\dot{I}(xy)} + \frac{4c\,\mathcal{H}}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}} \sqrt{\dot{I}(xy)} + \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}} \sqrt{\dot{I}(xy)}$$
a stąd jest
$$(73) \qquad \dot{I}(xy) < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 2 \right)^2 \frac{1}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$
przy jakiemkolwiek położeniu punktu (xy) wewnątrz obszaru D. Wobec nierówności 70 (str. 88) możemy powiedzieć, że nierówność 73 będzie prawdziwą i we wypadku $h' = 0$.

Mając tę nierówność otrzymujemy wniosek następujący: Jeżeli wprowadzimy oznaczenie
$$(74) \qquad \mathcal{L} = \int |F(x'y')|^2 d\tau$$
to zapomocą nierówności $\overset{D}{54}$ (str. 84) i 73 i równości 55 (str. 84) otrzymamy tak we wypadku $h' = 0$, jak we wypadku $h' = 1$ nierówność:
$$(75) \qquad |W(xy)|^2 < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 2 \right)^2 \cdot \frac{\mathcal{L}}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$
przy jakiemkolwiek położeniu punktu (xy) wewnątrz obszaru D i jeżeli parametr ξ spełnia nierówności 18 (str. 40) we wypadku $h' = 0$, a nierówności 18 (str. 40) i 49 (str. 46) we wypadku, gdy jest $h' = 1$.

§42. Niech obecnie funkcya $F(xy)$ będzie nieco ogólniejsza, a mianowicie:

1) Niech funkcya $F(xy)$ jest taką, iż istnieje całka 74;
2) niech nadto w punktach obszaru D, których odległości od krzywej C nie przekracza pewnej stałej i różnej od zera liczby, jest funkcya $F(xy)$ ograniczona.

Przy tych założeniach jest funkcya $\Phi(xy)$, określona wzorem 41 (str. 80), funkcyą ciągłą i nadto istnieją ciągłe pochodne $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ dla punktów obszaru D w okolicy krzywej C i wtedy jest oczywiście $\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i = \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e$. Jeżeli ograniczymy do takich wartości parametru ξ, które czynią zadość

zadość nierównościom 18 (str. 40) i 49 (str. 46), to można wykazać ~~[illegible]~~ istnienie funkcyi $u(xy)$ ze str. 80.

Istnieje bowiem dla wypadku $h'=0$ funkcya $u(xy)$, która wzdłuż krzywej C spełnia warunek $u_i = \Phi$, a wewnątrz ~~krzywej~~ C obszaru D równanie 42 (str. 80) — dość bowiem utworzyć ~~utworzyć~~ odpowiedni potencyał warstwy podwójnej rozpostartej wzdłuż krzywej albo można utworzyć potencyał $u(xy)$ warstwy pojedynczej, rozpostartej wzdłuż krzywej C, któryby wzdłuż krzywej C spełniał równanie:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{d\Phi}{dv}$$

(obie funkcye będą w obszarze D przyjmowały identyczne wartości); przy drugiej definicyi funkcyi $u(xy)$ istnieje granica $\left(\frac{dW}{dN}\right)_i$. Dla wypadku $h'=1$ otrzymujemy na funkcyę $u(xy)$ wzdłuż krzywej C warunek

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h.(u)_i + \left(\frac{d\Phi}{dN} - h\Phi\right)$$

otóż dość wtedy funkcyę $u(xy)$ obrać jako potencyał warstwy pojedynczej.

Widzimy tedy, że w obu wypadkach funkcya $W(xy)$ spełnia wzdłuż krzywej C równanie 39 (str. 80) i ma także granicę $\left(\frac{dW}{dN}\right)_i$.

Wystudyujemy górną granicę funkcyi $W(xy)$ i jej pochodnych, przyczem zakładamy, że parametr ξ czyni zadość nierównościom 18 (str. 40) i 49 (str. 46). Nałóżmy na funkcyę $F(xy)$ jeszcze warunek dodatkowy, że ma w obszarze D określoną granicę górną M dla swego modułu. Wskutek tego przy jakiemkolwiek położeniu punktu (xy) wewnątrz obszaru D mamy na mocy nierówności 63 (str. 52) i 72 (str. 54)

$$(76)\quad \begin{cases} \left|\Phi(xy)\right| < \dfrac{2\pi M}{\rho_1 \sin^2\frac{\Theta}{2}} \\[2ex] \left|\dfrac{\partial\Phi(xy)}{\partial x}\right| < \dfrac{M\pi}{\sqrt{\rho_1}\,\sin^2\frac{\Theta}{2}} \\[2ex] \left|\dfrac{\partial\Phi(xy)}{\partial y}\right| < \dfrac{M\pi}{\sqrt{\rho_1}\,\sin^2\frac{\Theta}{2}} \\[2ex] \left|\left(\dfrac{d\Phi}{dN}\right)_e\right| < \dfrac{2M\pi}{\sqrt{\rho_1}\,.\,\sin^2\frac{\Theta}{2}} \end{cases}$$

§43. Badajmy najpierw wypadek $h'=0$. Niech funkcya $u(xy)$ będzie potencyałem warstwy podwójnej, który wewnątrz obszaru D spełnia równanie

$$\Delta u + \xi u = 0$$

a wzdłuż krzywej C równanie: $u_i = \Phi$; na mocy pierwszej z nierówności 36 (str. 43) i pierwszej z nierówności 76 otrzymujemy:

(77) $$|\sigma| \leq \frac{8\pi M}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

jeżeli przez σ oznaczymy gęstość tej warstwy podwójnej; a na mocy nierówności 37 (str 43) będzie:

(78) $$|u(xy)| < \left(\frac{c}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{8\pi M}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

a że jest

$$W(xy) = \phi(xy) - u(xy)$$

więc z pierwszej nierówności 76 (str 91) i nierówności 78 wynika, że jest:

(79) $$|W(xy)| < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 2\right) \cdot \frac{2\pi M}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

przy jakiemkolwiek położeniu punktu xy wewnątrz obszaru D.

Jeżeli zaś funkcyę $u(xy)$ chcemy uważać za potencyał warstwy pojedynczej rozpostartej wzdłuż krzywej C, który wewnątrz obszaru D spełnia owo równanie $\Delta u + \xi u = 0$, a na krzywej C warunek

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{d\phi}{dN}$$

to wolno nam do funkcyi $u(xy)$ stosować nierowność 22 (str 41) przy uwzględnieniu nierówności 18 (str 40) i czwartej z nierówności 76 (str 91) i będziemy mieli:

(80) $$|D_{ni}(u)| < \left(\frac{c}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{8M\pi}{\sqrt{\rho_1} \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

a że jest

$$D_{ni}(W) = D_{ni}(\phi) - D_{ni}(u)$$

a na pochodną normalną funkcyi ϕ można otrzymać wzór analogiczny do czwartej z nierówności 76 (str 91), więc jest:

(81) $$|D_{ni}(W)| < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 2\right) \frac{2\pi M}{\sqrt{\rho_1} \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Oznaczając przez σ gęstość potencyału warstwy pojedynczej, za który wolno nam uważać funkcyę, użyjmy drugiej z nierówności 35 (str 33), która wskutek nierówności 18 (str 40) przybiera następującą postać:

$$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \frac{\sigma}{2}\right| < \frac{cS}{2\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} \leq \frac{S}{4}$$

jeżeli przez S oznaczymy górną granicę modułu funkcyi σ; stąd jest:

$$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e\right| < \frac{3S}{4}$$

a że na mocy nierówności 19 (str 40) jest

$$|\sigma| \leq \frac{8}{3}T \leq \frac{8M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

bo obecnie T jest górną granicą funkcyi $\left(\frac{d\phi}{dN}\right)_i$, więc jest:

(82) $$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_e\right| < \frac{6M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Z nierówności tej i z równości:

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \sigma$$

wynika

(83) $$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i\right| < \frac{14M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

i zarazem jest

(84) $$\left|\left(\frac{dW}{dN}\right)_i\right| < \frac{16M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

§44. Niech będzie obecnie $h'=1$; dla tego wypadku funkcya $u(xy)$ spełnia wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta u + \xi u = 0$$

i zarazem jest potencyałem warstwy pojedynczej, który wzdłuż krzywej C spełnia równanie:

(85) $$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \frac{d\phi}{dN} - h\phi$$

Jeżeli przez H oznaczymy górną granicę ~~modułu~~ wartości, jakie funkcya h przyjmuje wzdłuż krzywej C, to z nierówności 76 (str. 91) otrzymujemy

$$\left|\frac{d\phi}{dN} - h\phi\right| < \frac{2M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(1 + \frac{H}{\sqrt{p_1}}\right)$$

a że z nierówności 49 (str. 45) wynika:

$$\frac{H}{\sqrt{p_1}} \leq \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{8c} \leq \frac{1}{8c}$$

więc jest

$$\left|\frac{d\phi}{dN} - h\phi\right| < \frac{2M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(1 + \frac{1}{8c}\right)$$

a, że wolno przyjąć, że jest $8c > 1$ więc jest

(86) $$\left|\frac{d\phi}{dN} - h\phi\right| < \frac{4M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

wtedy z pierwszej nierówności 54 (str. 47) otrzymujemy:

(87) $$\left|D_{ni}(u)\right| < \left(\frac{c}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{4}\right)\frac{32M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

~~wskutek~~ z czego jest

(88) $$\left|D_{ni}(W)\right| < \frac{2M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\frac{16c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 5\right)$$

Wskutek nierówności 53 (str. 47) i 86 (str. 92) jest

(89) $$\left|\left(\frac{du}{dN}\right)_i\right| < \frac{8M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}\ ; \ \left|\left(\frac{dW}{dN}\right)_i\right| < \frac{10M\pi}{\sqrt{p_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

a z nierówności 51 (str. 76) wynika, że jest:

$$(90)\qquad |u(xy)| < \frac{32 M c \pi}{\rho_1 \sin^3\frac{\theta}{2}} \leq \frac{8 M \pi L}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

jeżeli się uwzględni nierówność 18 (str. 40); ostatecznie będzie

$$(91)\qquad |W(xy)| < \frac{2M\pi}{\rho_1 \sin^3\frac{\theta}{2}}(1+16c)$$

§45. Uważajmy teraz pierwsze pochodne funkcyi W wewnątrz obszaru D. Wystarcza zbadać wypadek $k'=0$. W tedy funkcyę $u(xy)$ wolno uważać za potencyał warstwy pojedynczej o gęstości σ, która czyni zadość ostatniej nierówności strony 92, której nadamy formę:

$$(92)\qquad |\sigma| \leq A.M$$

gdzie liczba dodatnia A od funkcyi $F(xy)$ nie zależy. Uważajmy pochodną $\frac{\partial W}{\partial x}$; będzie ona równa:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

Otóż dla funkcyi ϕ istnieje napewno granica $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i$; ponieważ jest

$$(93)\qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_C \sigma f(\rho\mu)\, ds$$

gdzie ρ oznacza długość odcinka łączącego punkt (xy) z punktami krzywej C. Stąd jest

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\int_C \sigma \frac{df(\rho\mu)}{d\rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}\, ds$$

ale moduł pochodnej $\frac{df(\rho\mu)}{d\rho}$ spełnia nierówność 7 (str. 6), więc gdy przez δ oznaczymy najkrótszą odległość punktu (xy) od punktów krzywej C, będzie:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{AM}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} m e^{-a\delta} + \frac{e^{-a\delta}}{\delta}\right)\int_C ds$$

istnieje więc funkcya dodatnia $\varpi(\delta)$ zależna od długości δ, która rośnie nieograniczenie wraz z liczbą $\left(\frac{1}{\delta}\right)$ taka, iż jest

$$(94)\qquad \left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| < \varpi(\delta).M \quad ; \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right| < \varpi(\delta).M$$

dla drugiej pochodnej pierwszej otrzymamy bowiem to samo. Zupełnie analogiczne nierówności otrzymamy na pochodne pierwsze funkcyi W we wypadku $k'=1$.

§46. Wyprowadzimy jeszcze pewne wzory ze względu na to, że będą nam niezbędne przy traktowaniu uproszczonego zagadnienia

Fouriera.

Rozróżnimy dwa wypadki.

A) Połóżmy najpierw $h' = 0$, to kładąc, jak przedtem

(95) $$W(xy) = \phi(xy) - u(xy)$$

wolno nam, jak zaznaczyliśmy, funkcyę $u(xy)$ uważać za potencyał warstwy pojedynczej, który wzdłuż krzywej C spełnia równanie:

(96) $$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{d\phi}{dN}$$

Kładąc

$$u(xy) = u_0(xy) + v(xy)$$

mamy

(97) $$W(xy) = \phi(xy) - u_0(xy) - v(xy)$$

przyczem otrzymujemy, że wzdłuż krzywej C jest:

(98) $$\left(\frac{dv}{dN}\right)_e = \frac{d\phi}{dN} - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_e$$

nałóżmy więc na funkcyę $u_0(xy)$ następujący warunek: niech to będzie potencyał warstwy ~~taki, że~~ pojedynczej taki, iż jest wzdłuż krzywej C:

(99) $$\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i = 2\frac{d\phi}{dN}$$

wskutek czego funkcya $v(xy)$ będzie potencyałem warstwy pojedynczej, która wzdłuż krzywej C spełnia równanie 98 i da się więc wyznaczyć. Jeżeli przez σ_0 oznaczymy gęstość potencyału $u_0(xy)$, to jest

(100) $$\sigma_0 = 2\frac{d\phi}{dN}$$

a wtedy równość 98 daje

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_e = \frac{\sigma_0}{2} - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_e$$

Na mocy nierówności 35 (str 33), równości 100 i ostatniej z czwartej z nierówności 76 (str 91) otrzymujemy:

$$\left|\left(\frac{dv}{dN}\right)_e\right| = \left|\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e - \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{c\ \max|\sigma_0|}{L\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}} < \frac{4M\pi c}{L\rho_1\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

czyli

(101) $$\left|\frac{d\phi}{dN} - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_e\right| < \frac{4M\pi c}{L\rho_1\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

A że nierówność 21 (str 41) odnosi się tak do równania 17 jak i równania 16 (str 40), więc z nierówności 101 wnosimy że jest:

(102) $$|v(xy)| < \frac{16M\pi c^2}{L\rho_1^{3/2}\sin^5\frac{\theta}{2}}$$

B) Przejdźmy do wypadku $h'=1$. Założymy, że zdefiniowaliśmy funkcyę $F(xy)$ także dla obszaru $\mathcal{D}'$, ale bacząc, by zachowane były następujące warunki:

1) wewnątrz obszaru $\mathcal{D}'$ funkcya $F(xy)$ ma być ciągła i jej moduł nie ma być większy od dokładnej górnej granicy M modułu tejże funkcyi w obszarze $\mathcal{D}$ czyli wszędzie ma być $|F(xy)| \leq M$;

2) jeżeli w pewnym punkcie krzywej C istnieje granica $(F(xy))_i$, to ma istnieć tamże także granica $(F(xy))_e$ i ma być:

$$(F(xy))_i = (F(xy))_e$$

Utwórzmy całkę analogiczną do całki $\phi(xy)$, a mianowicie:

$$(103) \qquad \psi(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_{(N)} F(x'y') f(\rho, \mu)\, d\tau$$

przyczem wskaźnik N wskazuje, że całkowanie rozpostarte na całą, nieograniczoną płaszczyznę; ρ oznacza odległość punktu (xy) od punktu bieżącego płaszczyzny $(x'y')$.

Połóżmy:

$$(104) \qquad W(xy) = \psi(xy) - u(xy)$$

a że od funkcyi $W(xy)$ żądamy, żeby wzdłuż krzywej C czyniła zadość nierówności

$$(105) \qquad \left(\frac{dW}{dN}\right)_i = h\, W_i$$

więc dla funkcyi $u(xy)$ otrzymamy warunek:

$$(106) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \frac{d\psi}{dN} - h\psi$$

który ma być spełniony wzdłuż krzywej C, istnieje bowiem granica $\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i$. Wolno więc przyjąć funkcyę $u(xy)$ jako potencyał warstwy pojedynczej, któryby wzdłuż krzywej C spełniał warunek 106.

Jeżeli położymy:

$$u = v - v_0$$

to będziemy mieli:

$$(107) \qquad W(xy) = \psi(xy) - v(xy) + v_0(xy)$$

Jeżeli funkcyę $v_0(xy)$ obierzemy jako potencyał warstwy pojedynczej gęstości

$$\sigma_0 = 2\frac{d\psi}{dN}$$

to na funkcyę $v(xy)$ otrzymujemy warunek:

(108) $\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h(v)_i - h(v_0)_i + \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i + \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i - h\psi$

Znajdźmy górną granicę na funkcyę $v(xy)$. Najpierw jest

$$|\psi(xy)| < \frac{2\pi M}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\left|\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i\right| < \frac{2M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

zupełnie jak w nierównościach 76 (str 91); stąd jest:

$$|\sigma_0| < \frac{4M\pi}{\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

a wskutek nierówności 34 (str 32), jest

$$|v_0(xy)| < \frac{4Mc\pi}{\rho_1 \sin^3\frac{\theta}{2}}$$

a przy pomocy pierwszej z nierówności 35 (str 33) jest:

$$\left|\left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i + \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i\right| = \left|\left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i + \frac{\sigma_0}{2}\right| < \frac{4Mc\pi}{\mathfrak{L}\rho_1 \sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Kładąc

$$\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h(v)_i + \tau$$

otrzymujemy

$$\tau = -h(v_0)_i + \left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i + \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i - h\psi$$

i jeżeli przez H oznaczymy górną granicę modułu funkcyi $h(xy)$ wziętą wzwyż $\mathfrak{C}$, to jest

$$|\tau| < \frac{4Mc\pi H}{\rho_1 \sin^3\frac{\theta}{2}} + \frac{4Mc\pi}{\mathfrak{L}\rho_1 \sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{2\pi M H}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}} < \frac{2\pi M}{\rho_1 \sin^4\frac{\theta}{2}}\left(2cH + \frac{2c}{\mathfrak{L}} + H\right)$$

przeto na podstawie nierówności 51 (str 46) jest

(109) $$|v(xy)| < \frac{16\pi Mc}{\rho_1^{3/2}\sin^5\theta/2}\left(H + 2cH + \frac{2c}{\mathfrak{L}}\right)$$

przy jakiemkolwiek położeniu punktu xy wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$.

V. Istnienie funkcyi harmonicznych.

§46. Ażeby wykazać istnienie funkcyi harmonicznych, uważajmy funkcyę $u(xy)$ o własnościach następujących:

1) funkcya $u(xy)$ ma mieć ciągłe pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$;

2) wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$ ma spełniać równanie:

(1) $\Delta u + \xi u + F(xy) = 0$ w punkcie xy, przyczem ξ oznacza, jak zwykle, parametr ~~dany~~ od współrzędnych xy niezależny, zaś funkcya $F(xy)$ daną funkcyą ciągłą taką, że funkcya $u(xy)$ od niej zależna spełnia warunek 1 i 3);

3) na ograniczeniu C mał być: $h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i$,

gdzie h', h są znanemi oznaczeniami.

Gdyby istniały dwie funkcye spełniające te warunki, to ich różnica $\varphi(xy)$ spełniałaby warunki następujące:

1) funkcya $\varphi(xy)$ miałaby ciągłe pochodne $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ wewnątrz obszaru D;

2) spełniałaby wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta\varphi + \xi\varphi = 0$$

3) na krzywej C byłoby: $h'\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_i = h(\varphi)_i$

Na mocy §32 (str. 65) możemy powiedzieć, że we wypadku $h'=0$ jest stale w całym obszarze D $\varphi \equiv 0$, jeżeli parametr ξ nie redukuje się do liczby rzeczywistej i dodatniej. We wypadku $h'=1$ istnieje liczba ~~dodatnia lub nie~~ nieujemna ξ_0 taka, iż, gdy tylko parametr ξ nie redukuje się do liczby rzeczywistej i nie mniejszej od liczby $-\xi_0$ (str. 67), to jest w całym obszarze D znowu $\varphi \equiv 0$.

W powyżej, dopieroco opisanych warunkach na parametr ξ istnieje co najwyżej tylko jedno rozwiązanie zagadnienia, które postawiliśmy na czoło obecnego paragrafu.

Wykażemy, że istnieje to jedyne rozwiązanie przy powyższych warunkach na ξ. Załóżmy najpierw, że jest $\xi = -\xi_0$, gdzie ξ_0 jest liczbą dodatnią i przekonajmy się, że powyżej zdefiniowana funkcya $u(xy)$ istnieje, gdy tylko liczba ξ_0 jest dość wielka.

Połóżmy

(2) $$u(xy) = \phi(xy) - w(xy)$$

(3) $$\phi(xy) = \frac{1}{2\pi}\int_{(D)} F(x'y') f(\rho, \mu_0)\, dz$$

gdzie ρ jest odległością punktów (xy) i $(x'y')$ obszaru D; μ_0 oznacza znów liczbę, w którą przechodzi liczba μ z §3 (str. 5), gdy za ξ podstawimy liczbę $(-\xi_0)$. Ponieważ funkcya $F(x'y')$ jest ograniczona, gdyż jest

ciągła w całym obszarze D, więc istnieją granice pochodnych normalnych funkcyi $\varphi(xy)$: $\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_i$, $\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_e$ i te granice będą sobie równe. Załóżmy, że funkcya ~~$\varphi(xy)$ jest nadto~~ $F(x'y')$ jest nadto taka, iż istnieją ciągłe drugie pochodne $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ wewnątrz obszaru D; jak wiadomo, funkcya $\varphi(xy)$ czyni będzie zadość równaniu

(4) $$\Delta\varphi - \xi_0\varphi + F(xy) = 0$$

wewnątrz obszaru D, a że jest tamże:

(5) $$\Delta u - \xi_0 u + F(xy) = 0$$

ze założenia, więc dla funkcyi $w(xy)$ otrzymamy równanie:

(6) $$\Delta w - \xi_0 w = 0$$

które ma być spełnione wewnątrz obszaru D, a na ograniczeniu ma funkcya ta spełniać warunek:

(7) $$h'\left(\frac{dw}{dN}\right)_i = h(w)_i + \left(h'\frac{d\varphi}{dN} - h\varphi\right)$$

Otóż z § 21, 22, 23 (str. 41 i nast.) wiadomo, że, gdy liczba ξ_0 jest taka iż we wypadku $h'=0$ spełnia związek:

(8) $$\frac{c}{2\sqrt{\xi_0}} \leq \frac{1}{4}$$

we wypadku $h'=1$ związek 8 i następny:

(9) $$\frac{4cH}{\sqrt{\xi_0}} \leq \frac{1}{2} \qquad (H = \max|h|)$$

to funkcya $w(xy)$ napewno istnieje.

Wobec tego możemy twierdzić, że przy powyższych warunkach na liczbę ξ_0 całka równania 5 z warunkiem granicznym

(10) $$h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i$$

istnieje. Rozwiązanie to, jak wiemy z § 40 (str. 84) daje się w prosty sposób wyrazić przez funkcyę Greena, która w tym wypadku na pewno istnieje, a mianowicie jest

(11) $$u(xy) = \int_{(D)} F(x'y')\, G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau$$

§ 48. Przejdźmy do wypadku ogólnego i załóżmy, że liczba dodatnia ξ_0 spełnia warunki 8 i 9 i połóżmy:

(12) $$\xi = \eta - \xi_0$$

(13) $$u = \sum_0^\infty u_\kappa \eta^\kappa$$

wtedy równanie (1) (str. 98) przyjmie postać następującą:

$$\Delta\left(\sum_0^\infty u_\kappa \eta^\kappa\right) + (\eta - \xi_0)\sum_0^\infty u_\kappa \eta^\kappa + F(xy) = 0$$

przeto mogę na funkcye $u_k(xy)$ przyjąć warunki

$$(14) \begin{cases} \Delta u_0 - \xi_0 u_0 + F(xy) = 0 \\ \Delta u_k - \xi_0 u_k + u_{k-1}(xy) = 0 \quad (k=1,2,\dots) \end{cases}$$

które mają być spełnione wewnątrz obszaru D.
Nadto z warunku 10 mogę przyjąć, że funkcye $u_k(xy)$ wzdłuż krzywej C spełniają równania:

$$(15) \qquad h'\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = h(u_k)_i \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

Jak wykazaliśmy w poprzednim paragrafie funkcye u_k istnieć będą i jest

$$(16) \begin{cases} u_0(xy) = \int\limits_D F(x'y')\, G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau \\ u_k(xy) = \int\limits_D u_{k-1}(x'y')\, G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau \qquad (k=1,2,3\dots) \end{cases}$$

Przyjąwszy takie funkcye $u_k(xy)$ chcemy zbadać, czy szereg 13 będzie zbieżny w obszarze D i czy rozwiązuje zagadnienie postawione na początku § 46.
Otóż kładąc

$$(17) \begin{cases} \dot{I}_{2k} = \int\limits_D u_k^2\, d\tau \qquad (k=0,1,2,\dots) \\ \dot{I}_{-2} = \int\limits_D F^2(x'y')\, d\tau \end{cases}$$

zróbmy założenie, że funkcya $F(xy)$ jest rzeczywistą w obszarze D, a że funkcya Greena $G(xy, x'y', -\xi_0)$ będzie też rzeczywistą, więc i funkcye $u_k(xy)$ będą rzeczywiste. Na mocy nierówności 75 (str 90) otrzymamy tak dla wypadku $h'=0$, jak i dla wypadku $h'=1$ nierówności

$$(18) \qquad u_k^2(xy) < (4c+2)^2 \frac{\dot{I}_{2k-2}}{\xi_0} \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

a całkując tę nierówność na cały obszar D, otrzymamy:

$$(19) \qquad \dot{I}_{2k} < (4c+2)^2 \frac{I_{2k-2}}{\xi_0} \cdot T \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

oznaczając przez T pole obszaru D; stąd wynika, że jest

$$(20) \qquad I_{2k} < (4c+2)^{2(k+1)} \frac{\dot{I}_{-2}}{\xi_0^{k+1}} \cdot T^{k+1}$$

Z tej nierówności i nierówności 18 wynika, że jest

$$(21) \qquad |u_k(xy)| < (4c+2)^{k+1} \cdot \frac{\dot{I}_{-2}}{\xi_0^{\frac{k}{2}}} \cdot T^{\frac{k}{2}}$$

Stąd widać, że jest:

$$|u(xy)| \leq \left|\sum_0^\infty u_k(xy)\cdot\eta^k\right| < \sqrt{I_{-2}}\sum_0^\infty (4c+2)^{k+1} T^{\frac{k}{2}} \frac{|\eta|^k}{\xi_0^{\frac{k}{2}}}$$

Szereg prawej strony jest zbieżny, gdy jest:

(22) $$|\eta| < \frac{\sqrt{\xi_0}}{(4c+2)\sqrt{T}}$$

jeżeli więc przez R oznaczymy jednostajnej zbieżności szeregu 13 (str. 99), to będzie: *)

(23) $$R \geq \frac{\sqrt{\xi_0}}{(4c+2)\sqrt{T}}$$

Na mocy równości 16 (str. 100) będzie:

(24) $$u(xy) = \int_D F(x'y')\, G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau + \sum_1^\infty \eta^k \int_D u_{k-1}(x'y')\, G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau$$

Uważajmy teraz szereg

(25) $$F(x'y') + \sum_1^\infty \eta^k u_{k-1}(x'y') = F(x'y') + \eta u(x'y')$$

jeżeli teraz liczba dodatnia R_1 jest dowolną byle mniejszą od R, to dla liczb

$$|\eta| \leq R_1 < R$$

---

*) Można dokładniej zbadać te stosunki, zachodzące, choć to dla samego zagadnienia, przez nas rozważanego jest obojętne, bo nam wystarczy się zapewnić, że operujemy szeregiem zbieżnym. Obok szeregu 13 (str. 99) który zwać będziemy szeregiem u, uważajmy dwa szeregi: $I' = \sum_0^\infty \eta^k \sqrt{I_{2k}}$ i szereg $\delta = \sum_0^\infty \delta_k \eta^k$ gdzie przez δ_k oznaczymy maximum funkcji $|u_k(xy)|$ w obszarze D (a takie maximum istnieje); oznaczmy promienie zbieżności tych szeregów przez R' względnie przez R''. Z powodu nierówności 19 (str. 100) jest $R' \geq \frac{\sqrt{\xi_0}}{(4c+2)\sqrt{T}}$. Z ~~powodu~~ definicji samego szeregu δ wynika, że jest $|u_k(xy)| \leq \delta_k$ i gdy liczba η ~~jest dodatnia~~ co do modułu jest mniejsza od liczby R'', to szereg δ, a więc także szereg u jest zbieżny i to jednostajnie w obszarze D czyli jest $R \geq R''$. Z jednostajnej zbieżności szeregu u wynika znów, że gdy tylko jest $0 < r_1 < R$, to jest $\lim_{k=\infty}(u_k(xy)\cdot r_1^k) = 0$ i to jednostajnie; istnieje więc stała dodatnia A niezależna od zmiennych (xy) taka, że jest $|u_k| < \frac{A}{r_1^k}$, gdy tylko liczba k przewyższa pewną liczbę k_0, a więc jest też $\delta_k < \frac{A}{r_1^k}$, z tego znów wynika, że szereg δ jest zbieżny dla $|\eta| < r_1$, a że liczba r_1 jest dowolna, byle dodatnia i mniejsza od liczby R, więc jest $R'' \geq R$. Ostatecznie otrzymujemy $R = R''$ czyli promień jednostajnej zbieżności szeregu u jest równy promieniowi zbieżności szeregowi δ. Można wykazać jeszcze, że jest $R' = R''$. Albowiem z nierówności 18 (str. 100)

będzie szereg 25 bezwzględnie i jednostajnie zbieżny i da się [illegible] znaleźć górną granicę modułów jego wartości w całym obszarze D; jeżeli więc punkt (xy) leżący wewnątrz obszaru D otoczymy kołem o promieniu r takiem, że całe leży wewnątrz obszaru D i przez Δ oznaczymy obszaru powstały z obszaru D przez wyłączenia wnętrza owego koła, to, jak bardzo łatwo wykazać, różnica

$$\int_D \left[F(x'y') + \eta u(x'y')\right] G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau - \int_\Delta \left[F(x'y') + \eta u(x'y')\right] G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau$$

będzie dążyła do zera wraz z promieniem r, a że w obszarze Δ można powyższy szereg człon za członem całkować, więc na mocy równości 24 otrzymujemy, że jest

$$(26) \qquad u(xy) = \int_{(D)} \left[F(x'y') + \eta u(x'y')\right] G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau$$

Zbadajmy teraz pochodne tej funkcyi, aby okazać, że funkcya ta spełnia wszystkie warunki:

W § 45 (str. 94) wykazaliśmy, że istnieje funkcya dodatnia $\varpi(\delta)$ zależna od najkrótszej odległości δ punktu xy od krzywej C rosnąca, w ogóle, nieograniczenie wraz z $\frac{1}{\delta}$ i taka, że jest

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right| < \varpi(\delta)\cdot M \quad ; \quad \left|\frac{\partial u_k}{\partial x}\right| < \varpi(\delta)\cdot \max|u_{k-1}| \qquad (k=1,2,\dots)$$

gdzie M oznacza górną granicę modułu funkcyi $|F(xy)|$; wskutek nierówności 21 szereg

$$\sum_0^\infty \frac{\partial u_k}{\partial x}\cdot \eta^k$$

jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w obszarze D jeżeli jest $|\eta| < R$;

---

wynika, że jest $|u_k| < \frac{4c+2}{\sqrt{\xi_0}}\sqrt{I_{2k-2}}$ i tem samem $\delta_k < \frac{4c+2}{\sqrt{\xi_0}}\sqrt{I_{2k-2}}$ przeto jest $R'' \geq R'$. Z nierówności:

$$\sqrt{I_{2k}} = \sqrt{\int_D u_k^2 d\tau} \leq \delta_k \sqrt{T}$$

wynika znów, że jest

$$R' \geq R''$$

Stąd wynika, że jest $R' = R''$. Ostatecznie otrzymaliśmy, że promień jednostajnej zbieżności szeregu u, promień zbieżności szeregu δ i promień zbieżności szeregu I to jest jedna i ta sama liczba. Twierdzenie to samo dla siebie przedstawia pewien interes, ale obecnie jest bezpotrzebne, dlatego umieściliśmy je i jego dowód w przypisku.

namocy § 18 (str 35 i nast.) istnieje pochodna $\frac{\partial u}{\partial x}$ i jest:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_0^\infty \frac{\partial u_k}{\partial x} \cdot \eta^k$$

i podobnie otrzymamy, że istnieje pochodna $\frac{\partial u}{\partial y}$ i jest:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_0^\infty \frac{\partial u_k}{\partial y} \cdot \eta^k$$

Jeżeli teraz zrobimy konkretne założenie o funkcyi $F(xy)$, że jest taką, iż funkcya

$$\int F(x'y') f(\rho \mu)\, dz$$

ma drugie pochodne wewnątrz obszaru D, (ρ oznacza długość odcinka łączącego punkty (xy) i $(x'y')$), to namocy równości 26 i tej okoliczności, że funkcya u (jak wykazaliśmy) ma wewnątrz obszaru D ciągłe ~~drugie~~ pierwsze pochodne, które dla punktów (xy), których odległość od punktów nie jest mniejsza od liczby δ rosnąj od zera, są ograniczone, funkcya ~~u~~(xy) będzie więc mieć drugie pochodne wewnątrz obszaru D i spełniające równanie:

$$\Delta u - \xi_0 u + (F(xy) + \eta u) = 0$$

czyli

$$\Delta u + \xi u + F(xy) = 0$$

Wedtug nierówności 81 (str 92) i 88 (str 93) istnieje dodatnia stała A, zależna od krzywej C i parametru ξ taka, iż tak dla wypadku $h' = 0$ jak i dla wypadku $h' = 1$ jest:

$$\left| D_{ni}(u_0) \right| < A.M \quad ; \quad \left| D_{ni}(u_k) \right| < A.\ \max |u_{k-1}|$$

Jeżeli więc jest

$$|\eta| < R$$

to szereg

$$\sum_0^\infty D_{ni}(u_k) . \eta^k$$

jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny przedstawia więc funkcyę $D_{ni}(u)$ i namocy § 17 (str 33 i nast.), ponieważ istnieją pochodne $\left(\frac{du_k}{dN}\right)_i$, będzie szereg:

$$\sum_0^\infty \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \cdot \eta^k$$

zbieżny wzdłuż krzywej C i będzie przedstawiał granicę $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$. Na mocy równości § 15 (str 100) otrzymujemy:

$$h' \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \sum_0^\infty h' \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \eta^k = \sum_0^\infty h(u_k)_i \eta^k = h(u)_i$$

Stąd widzimy, że, o ile tylko jest $|\eta| < R$ czyli $|\xi + \xi_0| < R$ funkcya u, będąca sumą szeregu 13 (str 99) ~~(?)~~ o określonych równościami 14 i 15 współczynnikach rozwiązuje zagadnienie,

§49. Uważajmy szereg $u(xy)$, rozważany w poprzednim paragrafie, zbieżny jednostajnie w pewnem kole o promieniu R, za element funkcyjny; przez jego analityczne przeprowadzenie (co do ξ) definiuje on pewną funkcyę, której osobliwości teraz zbadamy. Postąpimy metodą Poincarego, której myśl zasadnicza w ten sposób się przedstawia: wykażemy, że liczba R jest granicą pewnego nieskończonego ciągu liczb, a że liczba R między innemi zależy od funkcyi $F(xy)$, więc przez odpowiedni wybór tej funkcyi $F(xy)$ można liczbę R uczynić dowolnie wielką; następnie wykażemy, że funkcya $u(xy)$ da się wymiernie i całkowicie wyrazić przez pewną funkcyę u' której promień jednostajnej zbieżności R' można uczynić, jak się powiedziało, dowolnie wielkim i wyrazić wymiernie przez parametr ξ; funkcya $u(xy)$ będzie więc miała w obrębie koła zbieżności funkcyi u' jedynie bieguny; w następstwie zbadamy stopień ich wielokrotności i ~~ich~~ residua tej funkcyi $u(xy)$.

W tym celu uważajmy całki:

$$(27)\qquad I_{m,n}=\int_{\mathcal{D}}\left\{\frac{\partial u_m}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial u_m}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial y}+\xi_0\, u_m u_n\right\}d\tau+\int_{C} h\, u_m u_n\, ds$$

gdzie u_m, u_n oznaczają funkcye z poprzedniego rozdziału. Na mocy twierdzenia Greena będzie tak we wypadku $h'=0$, jak we wypadku $h'=1$:

$$(28)\qquad I_{m,n}=\int_{(\mathcal{D})} u_m u_{n-1}\, d\tau=\int_{(\mathcal{D})} u_{m-1} u_n\, d\tau$$

kładąc w tej równości liczbę $m-1$ za liczbę m i liczbę $n+1$ za liczbę n otrzymujemy:

$$I_{m-1,n+1}=\int_{(\mathcal{D})} u_{m-1} u_n\, d\tau=\int_{\mathcal{D}} u_{m-2} u_{n+1}\, d\tau$$

a więc jest

$$(29)\qquad I_{m,n}=I_{m-1,n+1}$$

kładąc w tej ostatniej równości liczbę $m+1$ za liczbę m i liczbę $n-1$ za liczbę n otrzymujemy:

$$I_{m+1,n-1}=I_{m,n}$$

a więc jest

$$(30)\qquad I_{m,n}=I_{m-1,n+1}=I_{m-2,n+2}=\ldots=I_{m+1,n-1}=I_{m+2,n-2}=\ldots$$

stąd wynika, że całki $I_{m,n}$ mają tę samą wartość przy różnych wartościach

liczb m, n, byleby suma wskaźników $m+n$ zachowała tę samą wartość; wskutek tego wolno uprościć znakowanie; ażeby całki $\dot{I}_{2k}$ były identyczne z całkami rozważanemi w poprzednim paragrafie, dlatego kładziemy:

(31) $$\dot{I}_{m,n} = \dot{I}_{m+n-1}$$

Całki $\dot{I}_{2k}$ będą miały wartość dodatnią. Uważajmy całkę $\dot{I}_{2k-1}$ t. j. jest $m=k$, $n=k$, a więc jest

(32) $$\dot{I}_{2k-1} = \int_D \left\{ \left(\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_k}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u_k^2 \right\} ds + \int_C h u_k^2 ds$$

Już raz (str. 66 i 67) cytowaliśmy twierdzenie p. Zaremby następujące: jeżeli funkcya U jest dowolnie nieujemna w obszarze D obrana, byle całka

$$\int_D \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 U^2 \right\} d\tau$$

miała sens, to, gdy tylko liczba ξ_0 jest dość wielka, to jest też:

(33) $$\frac{\int_D \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 U^2 \right\} d\tau}{\int_C U^2 ds} > \frac{\sqrt{\xi_0}}{4c}$$

gdy więc, co wolno, obierzemy liczbę ξ_0 nadto tak, że jest

$$\sqrt{\xi_0} > 4cH$$

gdzie H jest górną granicą funkcyi h, to jest:

$$\int_D \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 U^2 \right\} d\tau - H \int_C U^2 ds > 0$$

a przez to jest

(33bis) $$\int_D \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 U^2 \right\} d\tau + \int_C h U^2 ds > 0$$

stąd wnioskujemy, że jest

$$\dot{I}_{2k-1} > 0$$

czyli wszystkie całki $\dot{I}_p$ są dodatnie.

Połóżmy teraz w ~~wzorze 33~~ nierówności 33:

$$U = l u_m + \lambda u_n$$

gdzie λ, l są liczbami stałemi rzeczywistemi; strona lewa nierówności będzie formą kwadratową co do liczb l, λ nieujemną, więc jej wyróżnik nie może być dodatni; będzie tedy:

$$\dot{I}_{m+n-1}^2 \leq \dot{I}_{2m-1} \dot{I}_{2n-1}$$

kładąc tu $m=k$, $n=k+1$, otrzymujemy nierówność

(34) $$\dot{I}_{2k}^2 \leq \dot{I}_{2k-1} \cdot \dot{I}_{2k+1}$$

Nadto z równości
$$\dot{I}_{2k-1} = \dot{I}_{k,k} = \int_D u_k u_{k-1} d\tau$$
otrzymujemy:

(35) $$I_{2k-1}^2 \leq I_{2k} \cdot I_{2k-2}$$

tedy dla każdego całkowitego p i nieujemnego p z powodu nierówności 34 (str 105) i 35 mamy:

(36) $$\dot{I}_p^2 \leq \dot{I}_{p-1} \cdot \dot{I}_{p+1}$$

nadto z nierówności 34 mamy:
$$\frac{I_{2k-1}^2}{I_{2k-2}^2} \leq \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} \leq \frac{I_{2k}^2}{I_{2k-1}^2}$$
a stąd jest:

(37) $$\frac{\dot{I}_{2k-1}}{\dot{I}_{2k-2}} \leq \sqrt{\frac{\dot{I}_{2k}}{\dot{I}_{2k-2}}} \leq \frac{\dot{I}_{2k}}{\dot{I}_{2k-1}}$$

Uważajmy teraz ciąg liczb następujący:

(38) $$\frac{\dot{I}_{-1}}{\dot{I}_0};\ \frac{\dot{I}_0}{\dot{I}_1};\ \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2};\ \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_3};\ \ldots\ldots$$

Na mocy nierówności 36 liczby te tworzą ciąg nigdy nierosnący, a że stale dodatnie, więc mają granicę, którą oznaczymy przez R' i będzie

(39) $$\frac{\dot{I}_p}{\dot{I}_{p+1}} \geq R' \qquad (p = -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Przez R oznaczyliśmy promień zbieżności szeregu:

(40) $$\sum_0^\infty \eta^k \sqrt{I_{2k}}$$

który jest równy promieniowi jednostajnej zbieżności szeregu 13 (str 99), jak to wykazano w przypisku do str 101.

Okażemy, że gdy jest $|\eta| < R'$, to szereg 40 jest zbieżny, gdy zaś jest $|\eta| > R'$, to szereg 40 jest rozbieżny; więc na mocy pojęcia promienia zbieżności jest $R' = R$

Weźmy taką dodatnią liczbę R_1, by będąc dowolnie bliską liczby R' była od liczby R' mniejszą i niech jest $|\eta| \leq R_1$; na mocy nierówności 37 i 39 jest:
$$\left|\eta \cdot \sqrt{\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}}\right| \leq R_1 \sqrt{\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}} < R_1 \frac{I_{2k}}{I_{2k-1}} < \frac{R_1}{R'} < 1$$
wobec tego szereg 40 jest zbieżny, a że liczba R_1 jest dowolną, więc, gdy jest $|\eta| < R'$, to szereg 40 jest zbieżny. Niech liczba R_2, będąc choćby dowolnie bliską liczby R' jest od niej większą i niech jest $|\eta| \geq R_2$; wskutek tego i nierówności 39 można znaleźć taką do-

dodatnią liczbę całkowitą k', iż dla wszystkich liczb k nie mniejszych od liczby k' jest:

$$R_2 > \frac{I_{2k-2}}{I_{2k-1}}$$

tedy będzie:

$$\left|\eta \cdot \sqrt{\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}}\right| \geqslant R_2 \sqrt{\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}} > \frac{I_{2k-2}}{I_{2k-1}} \cdot \frac{I_{2k-1}}{I_{2k-2}} = 1$$

szereg będzie więc rozbieżny, a że liczba R_2 była zresztą dowolną, więc dla $|\eta| > R'$ jest szereg 40 (str. 106) rozbieżny czyli będzie $R = R'$, jak zapowiedzieliśmy.

Wykażemy teraz, że można zawsze tak obrać funkcyę $F(xy)$, iż ciąg 38 (str. 106) ma tak wielką granicę, jak wielką mieć chcemy. Oznaczmy przez $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ p stałych rzeczywistych, $F_1, F_2, \ldots F_p$ p funkcyi obszaru D o tych samych własnościach ciągłości, co funkcya dotychczasowa funkcya $F(xy)$ i połóżmy

(41) $$F' = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k F_k$$

i niech liczba p będzie jeszcze liczbą dowolną, ale skończoną. Oznaczmy dalej przez $u_0' u_1' \ldots u_k' \ldots$ funkcye, w które przechodzą funkcye $u_0 u_1 \ldots u_k \ldots$, gdy za funkcyę $F(xy)$ podstawimy funkcyę F'. Jak widać z równości 16 (str. 100) funkcye $u_0' u_1' \ldots u_k' \ldots$ wyrażają się liniowo i jednorodnie przez ~~funkcye~~ liczby $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ tak, iż jest

(42) $$u_k' = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \cdot v_{jk}$$

gdzie v_{jk} są odpowiedniemi funkcyami. Oznaczmy przez I_k', w którą przechodzi całka I_k, gdy zamiast funkcyi $F(xy)$ użyjemy funkcyi F' i wyrażajmy ciąg liczb:

(43) $$\frac{I_1'}{I_0'}\,;\ \frac{I_0'}{I_1'}\,;\ \frac{I_1'}{I_2'}\,;\ \ldots\ldots$$

granicę tego ciągu oznaczmy przez R'; będzie ona jak już wiemy, promieniem jednostajnej zbieżności szeregu:

(44) $$u' = \sum_{0}^{\infty} u_k' \eta^k$$

Okażemy, że można liczbę R' dowolnie wielką uczynić. Wiadomo z twierdzenia Poincarégo, że byle liczba p była większa od pewnej liczby p_0 dodatniej, zależnej od krzywej C, to można wyznaczyć ~~tak~~ liczby $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ z układu co najwyżej $p-1$ równań liniowych i jednorodnych, by niezależnie od funkcyi $v_{1k}, v_{2k}, \ldots v_{pk}$ zachodziła nierówność:

(45) $$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 \right\} d\tau \geq 2Ep \int\limits_{(D)} u'^2_k d\tau$$

poczem E oznacza dodatnią stałą zależną jedynie od krzywej C.
Na mocy nierówności 33 (str 105) mamy też

(46) $$\int\limits_{D} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u'^2_k \right\} d\tau > \frac{\sqrt{\xi_0}}{4c} \int\limits_{C} u'^2_k ds$$

jeżeli więc założymy, że jest

$$\sqrt{\xi_0} > 8cH$$

gdzie H oznacza górną granicę modułu funkcyi h, to jest także

$$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u'^2_k \right\} d\tau + 2\int\limits_{C} h u'^2_k ds > 0$$

jeżeli do tej nierówności dodamy nierówność 46 i podzielimy przez 2, to otrzymamy:

$$\int\limits_{D} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \frac{\xi_0}{2} u'^2_k \right\} d\tau + \int\limits_{C} h u'^2_k ds > Ep \int\limits_{D} u'^2_k d\tau$$

a więc tem bardziej będzie:

$$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u'^2_k \right\} d\tau + \int\limits_{C} h u'^2_k ds > Ep \int\limits_{D} u'^2_k d\tau$$

co można napisać w postaci następującej:

(47) $$\frac{I'_{2k-1}}{I'_{2k}} > E.p$$

i wskutek tego jest też

(48) $$R' > Ep$$

Szereg 44 (str 107) jest więc jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w kole o promieniu R' większym od liczby, która się proporcyonalnie do liczby p zwiększa.
Jeszcze dodać musimy, że we wypadku $h=0$ wprost z nierówności 45 otrzymujemy, że jest

$$\int\limits_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u'_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'_k}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u'^2_k \right\} d\tau > 2Ep \int\limits_{D} u'^2_k d\tau$$

i stąd, że jest

$$R' > 2Ep$$

a więc tem bardziej zachodzi nierówność 48.
Funkcye $F_1, F_2, \ldots, F_p$ obierzmy tak, aby było:

$$F' = \alpha_1 F_1 + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{j+1} u_{j-1}$$

co wolno, bo nierówność 48 zachodzi, jakiekolwiek są funkcye $F_1 F_2 \ldots F_p$

wskutek tego będzie:

$$u_0' = \alpha_1 u_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{j+1} u_j \quad \text{itd}$$

i jak łatwo wykazać metodą zupełnej indukcyi będzie:

$$(49) \qquad u_k' = \alpha_1 u_k + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{j+1} \cdot u_{k+j}$$

wobec tego szereg 44 (str. 107) przyjmie postać:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_1 u_k + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{j+1} u_{k+j} \right) \eta^k$$

co z powodu absolutnej zbieżności, gdy jest $|\eta| < R'$, można napisać we formie

$$(50) \qquad u' = \alpha_1 u + \alpha_2 w_1 + \dots + \alpha_p w_{p-1}$$

gdzie kładziemy

$$(51) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+j} \eta^k = w_j \qquad (j = 1, 2, \dots, p-1)$$

i bierzemy $|\eta| < R$, bo szeregi w_j mają ten sam promień jednostajnej zbieżności R, co szereg u. Nadto z równości 51 otrzymujemy, że jest:

$$(52) \qquad \begin{cases} w_j - \eta w_{j+1} = u_j & (j = 1, 2, \dots p-2) \\ u - \eta w_1 = u_0 \end{cases}$$

Równania 50 i 52 uważajmy za układ p równań o niewiadomych $u, w_1, \dots, w_{p-1}$. Wyznacznik ich względem tych niewiadomych będzie:

$$(53) \qquad R(\eta) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & -\eta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\eta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\eta \end{vmatrix} = (-1)^{p-1} \left\{ \alpha_p + \alpha_{p-1}\eta + \dots + \alpha_1 \eta^{p-1} \right\}$$

a więc nie jest identycznie zerem i przeto będzie

$$(54) \qquad u = \frac{\begin{vmatrix} u' & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -\eta & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \\ u_{p-2} & 0 & \dots & 1 & -\eta \end{vmatrix}}{R(\eta)} = \frac{\phi(xy, \eta)}{R(\eta)}$$

gdzie funkcya $\phi(xy, \eta)$ wyraża się liniowo i jednorodnie przez funkcye $u', u_0, u_1, \dots, u_{p-2}$, przeto ma sens określony dla $|\eta| < R'$ i dla tych liczb η ma określoną granicę $\left(\frac{d\phi}{dN}\right)_i$. Oznaczmy przez Σ_1 koło wykreślone z punktu $(-\xi_0)$, jako środka o promieniu R'.
Na mocy równości 54 możemy powiedzieć, że funkcya u może mieć tylko te liczby η, jako bieguny w kole Σ_1, które są pierwiastkami równania:

(55) $$\mathcal{R}(\eta) = 0$$

i których obrazy geometryczne będą leżały wewnątrz koła Σ.
Okażemy, że bieguny te są pojedyncze i zbadajmy residua funkcyi u dla tych biegunów.
Załóżmy w tym celu, że wyrażenie ułamkowe $\frac{\Phi(xy,\eta)}{\mathcal{R}(\eta)}$ jest już nieskracalne co do liczby η. Z równości 54 otrzymujemy, że funkcya $\phi(xy,\eta)$ jako funkcya zmiennych xy spełnia wewnątrz obszaru D równanie

(56) $$\Delta\phi + (\eta - \xi_0)\phi + F(xy) \cdot \mathcal{R}(\eta) = 0$$

a wzdłuż krzywej C warunek:

(57) $$h'\left(\frac{d\phi}{dN}\right)_i = h(\phi)_i$$

przyczem równości 56 i 57 zachodzą nawet, gdy jest $|\eta| < \mathcal{R}'$. Załóżmy, że liczba η_1 jest biegunem funkcyi u co najmniej dwukrotnym, że więc w każdym razie jest $\mathcal{R}(\eta_1) = 0$, $\mathcal{R}'(\eta_1) \equiv \left(\frac{d\mathcal{R}}{d\eta}\right)_{\eta=\eta_1} = 0$; oznaczmy dalej

$$\phi_1 = \phi(xy,\eta_1)\ ; \quad \phi' = \frac{d\phi(xy,\eta)}{d\eta}\ ; \quad \phi_1' = \left(\frac{d\phi(xy,\eta)}{d\eta}\right)_{\eta=\eta_1}$$

uważając oczywiście zmienne xy za niezależne od zmiennej η.
Mamy więc z równości 56 i 57

$$h'\left(\frac{d\phi_1}{dN}\right)_i = h(\phi_1)_i\ ; \quad h'\left(\frac{d\phi_1'}{dN}\right)_i = h(\phi_1')_i$$

$$\Delta\phi_1 + (\eta_1 - \xi_0)\phi_1 = 0\ ; \quad \Delta\phi' + (\eta - \xi_0)\phi' + \phi + F(xy) \cdot \mathcal{R}'(\eta) = 0$$

$$\Delta\phi_1' + (\eta_1 - \xi_0)\phi_1' + \phi_1 = 0$$

Weźmy teraz do pomocy Twierdzenie Greena:*)

$$\int_C \left\{\phi_1 \frac{d\phi_1'}{dN} - \phi_1' \frac{d\phi_1}{dN}\right\}_i ds + \int_D \left\{\phi_1 \Delta\phi_1' - \phi_1' \Delta\phi_1\right\} d\tau = 0$$

co się redukuje ~~do~~ równości:

$$-\int_{(D)} \phi_1^2 d\tau = 0$$

czyli jest

$$\phi_1 \equiv 0$$

w całym obszarze D, a więc funkcya $\phi(xy,\eta)$ jest podzielna przez dwumian $\eta - \eta_1$ wbrew założeniu.
Bieguny funkcyi u są więc pojedyncze. A że promień $\mathcal{R}'$ koła Σ można uczynić dowolnie wielkim przez odpowiedni dobór liczby p, więc funkcya u może mieć w skończoności jedynie bieguny pojedyncze — jest więc f jako funkcya parametru ξ meromorficzna.

(*) patrz uw. na str. 65

Oznaczywszy przez $U(xy)$ residuum funkcyi u odnośnie do bieguna η_1, mamy

$$u = \frac{U(xy)}{\eta-\eta_1} + V(xy,\eta)$$

gdzie funkcya $V(xy,\eta)$ będzie holomorficzna w funkcie η_1. Z własności funkcyi u wynika, że wewnątrz obszaru D jest:

$$\Delta U + (\eta-\eta_1)\,\Delta V + (\eta-\xi_0)\{U + (\eta-\eta_1)V\} + (\eta-\eta_1)F(xy) = 0$$

a wzdłuż krzywej C jest:

$$h'\left\{\frac{dU}{dN} + (\eta-\eta_1)\frac{dV}{dN}\right\}_i = h\{U + (\eta-\eta_1)V\}_i$$

kładąc $\eta=\eta_1$, co wolno, otrzymujemy, że residuum $U(xy)$ czyni zadość równaniom

(58). $\begin{cases} \text{wewnątrz obszaru } D: & \Delta U + (\eta_1-\xi_0)U = 0 \\ \text{wzdłuż krzywej } C & h'\left(\frac{dU}{dN}\right)_i = h(U)_i \end{cases}$

Jeżeli się odniesiemy do twierdzeń udowodnionych na str. 65 i 67., to stąd wynika:

1) bieguny funkcyi u muszą być rzeczywiste;
2) we wypadku $h'=0$ są położone na dodatniej półosi rzeczywistej parametru ξ; we wypadku $h'=1$ bieguny są położone na dodatniej i ujemnej półosi rzeczywistej parametru, ale bezwzględna wartość ujemnego bieguna nie może być większą od większej z liczb. $\frac{16c^2}{\mathcal{L}^2}$, $64c^2\mathcal{H}^2$.

Gdyby residuum było funkcyą nierzeczywistą, to położylibyśmy

$$U = U_1 + iU_2$$

gdzie U_1, U_2 oznaczają funkcye rzeczywiste zmiennych (xy) i oczywiście każda z nich spełniałaby te same warunki, co funkcya U.

Zbadajmy dodatkowo, czy funkcya u musi mieć co najmniej jeden biegun położony w skończoności. Gdyby bowiem tak nie było, musiałby promień zbieżności funkcyi u być nieskończenie wielkim, a że ciąg 38 jest nigdy nierosnącym, więc pierwszy jego wyraz musiałby być nieokreślony, a więc musiałoby być $I_0=0$ czyli w całym obszarze D byłoby $u_0\equiv 0$, a że jest:

$$u_0 = \int F(x'y')\,G(xy, x'y', -\xi_0)\,d\sigma$$

więc funkcya u_0 mogłaby być identycznie równa zeru w całym obszarze D jedynie dla specyalnej funkcyi $F(x'y')$, ale nie ogólnie.

§ 50. Studyum funkcyi $u(xy)$, jej biegunów i jej residuów zapewniło nas o istnieniu pewnej kategoryi funkcyi rzeczywistych;

wyobraźmy sobie ich zbiór i wybierzmy te z nich, które są liniowo od siebie niezależne. Możemy więc powiedzieć:

Do krzywej C i wielkości $h' = 0,1$ i funkcyi h ciągłej wzdłuż krzywej C istnieje ciąg nieograniczony rzeczywistych funkcyi, liniowo od siebie niezależnych, $U_1, U_2, U_3, \ldots$, zwanych funkcyami harmonicznemi o następujących własnościach:

1) wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$ ograniczonego krzywą C czynią zadość równaniom:

$$\Delta U_k + \xi_k U_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

gdzie liczby $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots$ są rzeczywiste, dla wypadku $h' = 0$ dodatnie, zaś w wypadku $h' = 1$ dodatnie i ujemne, byle, gdy są ujemne, nie miały wartości bezwzględnej większej od większej z liczb $\frac{16c^2}{\mathfrak{L}^2}$; $64c^2\mathfrak{H}^2$; nadto jest $\xi_k \leq \xi_{k+1}$

2) wzdłuż krzywej C funkcye U_k spełniają równanie:

$$h'\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i = h(U_k)_i$$

Powyższe słowa zawierają ~~jasne~~ twierdzenie, które należy jeszcze uzasadnić. Wyobraźmy sobie zbiór rzeczywistych i liniowo od siebie niezależnych funkcyi harmonicznych. Udowodnimy, że jest to zbiór odliczalny, że więc można funkcye harmoniczne ustawić w ciągu, jakeśmy to wyżej zrobili.

W każdym razie ze wspomnianego zbioru mogę wyjąć pewien ciąg funkcyi harmonicznych:

$$(59) \qquad U_1, U_2, U_3, \ldots$$

należących do liczb $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots$, gdzie jest $\xi_k \leq \xi_{k+1}$.

Mając funkcyę U_k, ~~wiemy~~ z rozumowań ~~ze~~ analogicznych do rozumowań ze str. 73 i 74 (u góry) wykażemy istnienie granicy $\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i$. Dość bowiem w tym celu położyć:

$$U_k = \phi - u \quad ; \quad \phi = \frac{\xi_k + \xi_0}{2\pi}\int_{\mathfrak{D}} U_k f(\rho, \rho_0)\, d\tau \quad ; \quad \Delta u - \xi_0 u = 0$$

aby to natychmiast uzasadnić. Uważajmy teraz dwie funkcye ciągu 59: U_k, U_j i stosujmy do nich twierdzenie Greena:

$$\int_{(C)}\left(U_k \frac{dU_j}{dN} - U_j \frac{dU_k}{dN}\right)_i ds + \int_{\mathfrak{D}}\left(U_k \Delta U_j - U_j \Delta U_k\right) d\tau = 0$$

co się redukuje do równości: $(\xi_k - \xi_j)\int_{\mathfrak{D}} U_k U_j\, d\tau = 0$

a więc, gdy liczby k i j są takie, iż jest

(60) $k \neq j$

(61) $\xi_k \neq \xi_j$

to jest

(62) $\int_{D} U_k U_j \, d\tau = 0$

ale mimo, iż zachodzi nierówność 60 nie musi zachodzić nierówność 61, a więc równość 62 nie jest konsekwencyą samej nierówności 60, ale w tym wypadku wykażemy, że można się zawsze tak urządzić, aby nierówność 60 pociągała za sobą w konsekwencyi równość 62. Załóżmy, że jest:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \dots = \xi_n \neq \xi_{n+1}$$

i połóżmy

$$63 \quad \begin{cases} U_1' = a_{11} U_1 \\ U_2' = a_{21} U_1 + a_{22} U_2 \\ U_3' = a_{31} U_1 + a_{32} U_2 + a_{33} U_3 \\ \dots \dots \dots \\ U_n' = a_{n1} U_1 + a_{n2} U_2 + \dots + a_{nn} U_n \end{cases}$$

gdzie liczby stałe $a_{11}, a_{12} \dots a_{nn}$ są jeszcze na chwilę nieoznaczone; jest ich $\frac{n(n+1)}{2}$. Wyznaczmy te stałe tak, aby zachodziły równości

$$(64) \quad \int_{(D)} U_k'^2 \, d\tau = 1 \; ; \quad \int_{D} U_k' U_j' \, d\tau = 0 \quad \left(\begin{matrix} k \neq j \\ k = 1, 2, \dots n \\ j = 1, 2, \dots n \end{matrix} \right)$$

równań jest $\frac{n(n+1)}{2}$. Widać, że bardzo łatwo można wyznaczyć stałe a_{11}, a_{21}, a_{22}, przyczem jest $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ i łatwo wykazać, że, jeśli można wyznaczyć stałe a_{11}; a_{21}, a_{22}; a_{31}, a_{32}, a_{33}; .....; $a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots, a_{kk}$, to można także wyznaczyć stałe $a_{k+1,1}, a_{k+1,2} \dots a_{k+1,k+1}$ i jest $a_{kk} \neq 0$, jak i $a_{k+1,k+1} \neq 0$. Na mocy zasady metody zupełnej indukcyi wnosimy, że stałe $a_{11} \dots a_{nn}$ można wyznaczyć i że wszystkie stałe $a_{k,k}$ są różne od zera. Nadto wszystkie funkcye $U_1', U_2', \dots, U_n'$ spełniają wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta U_k' + \xi_1 U_k' = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

a wzdłuż krzywej C warunek:

$$h' \left(\frac{dU_k'}{dN} \right)_i = h \left(U_k' \right)_i$$

Ponieważ jest

$$a_{kk} \neq 0 \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

więc funkcye $U_1', U_2', \dots, U_n'$ są od siebie liniowo niezależne; wobec tego

zamiast funkcyi $U_1, U_2, \dots, U_n$ można uważać funkcye $U_1', U_2' \dots U_n'$. Można więc zawsze przypuścić, że funkcye $U_1, U_2, \dots U_n$ rzeczywiste i liniowo od siebie niezależne są tak wybrane, iż zachodzą równości

(65) $$\int\limits_{(\mathfrak{D})} U_k^2 d\tau = 1 \quad , \quad \int\limits_{\mathfrak{D}} U_k U_j d\tau = 0 \qquad (k \neq j)$$

Utwórzmy teraz funkcye:

$$V = \sum_1^p \alpha_k U_k \quad ; \quad \phi = \sum_1^p \alpha_k \xi_k U_k$$

i widoczna, że jest:

wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$ $\qquad \Delta V + \phi = 0$

wzdłuż krzywej $\mathfrak{C}$ $\qquad h'\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = h(V)_i$

jeżeli $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ oznaczają p stałych, dotąd dowolnych. Wskutek tego jest

(66) $$\int\limits_{(\mathfrak{D})}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right\} d\tau + \int\limits_{\mathfrak{C}} h(V)_i^2 ds - \int\limits_{\mathfrak{D}} V\phi\, d\tau = 0$$

tak w wypadku $h'=0$, jak i dla wypadku $h'=1$.

Na mocy już raz cytowanego twierdzenia Poincarego wykazaliśmy na str. 108 we wypadkach $h'=0, 1$ nierówność:

(67) $$\int\limits_{(\mathfrak{D})}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 V^2\right\} d\tau + \int\limits_{\mathfrak{C}} h(V)_i^2 ds > E_p \int\limits_{\mathfrak{D}} V^2 d\tau$$

gdzie jest stałą dodatnią, zależną od krzywej $\mathfrak{C}$, ξ_0 jest dodatnią liczbą dość wielką; wykazaliśmy, że można tak stałe $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ wyznaczyć, byle ich ilość p nie była mniejsza od pewnej skończonej liczby p_0. (We wypadku $h'=0$ strona lewa nierówności 67 upraszcza się, bo znika całka krzywoliniowa). Na mocy równania 66 z nierówności 67 otrzymujemy, że jest

$$\int\limits_{(\mathfrak{D})} V\phi\, d\tau > (E_p - \xi_0) \int\limits_{(\mathfrak{D})} V^2 d\tau$$

przyczem zakładamy, że jest $E_p - \xi_0 > 0$; stąd kolejno będzie

$$\int\limits_{\mathfrak{D}} V^2 d\tau \int\limits_{\mathfrak{D}} \phi^2 d\tau \geq \left(\int\limits_{\mathfrak{D}} V\phi\, d\tau\right)^2 > (E_p - \xi)^2 \left(\int\limits_{\mathfrak{D}} V^2 d\tau\right)^2$$

(68) $$\int\limits_{\mathfrak{D}} \phi^2 d\tau > (E_p - \xi_0)^2 \int\limits_{\mathfrak{D}} V^2 d\tau$$

Na mocy równań 65 jest

$$\int\limits_{(\mathfrak{D})} \phi^2 d\tau = \sum_1^p \alpha_i^2 \xi_i^2 \leq \xi_p^2 \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 \quad ; \quad \int\limits_{\mathfrak{D}} V^2 d\tau = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2$$

tedy jest z nierówności (68): $\qquad \xi_p^2 > (E_p - \xi_0)^2$

czyli $|\xi_p| > Ep - \xi_0 = p(E - \frac{\xi_0}{p})$

gdy więc liczba p jest dość wielka, to istnieje stała dodatnia E' zależna od krzywej taka, iż jest

(69) $$|\xi_p| > E'p$$

a żeś liczby ξ_p nie mogą być dowolnie wielkie co do bezwzględnej wartości i równocześnie ujemne, więc ujemnych liczb ξ_p jest skończona ilość, dodatnich zbiór odliczalny, jak to już napisaliśmy. Nadto, gdy liczba p nie będzie mniejsza od pewnej skończonej dodatniej liczby p_1, to liczby ξ_p będą dodatnie i będą spełniały nierówność:

(69bis) $$\xi_p > E'p \qquad p \geq p_1$$

§ 51. Dokończymy studyum funkcyi u. Wykazaliśmy, że jako funkcya parametru ξ jest funkcyą meromorficzną o biegunach pojedynczych. Niech (liczba) ξ' jest jej biegunem i niech jest

$$\xi_{k-1} \neq \xi' = \xi_k = \xi_{k+1} = \dots = \xi_l \neq \xi_{l+1}$$

Jeżeli przez P oznaczymy residuum funkcyi dla tego bieguna, to funkcya P czyni zadość równaniu $\Delta P + \xi' P = 0$ wewnątrz obszaru D, a wzdłuż krzywej C równaniu $h'\left(\frac{dP}{dN}\right)_i = h(P)_i$, więc musi liniowo i jednorodnie zależeć od funkcyi harmonicznych U_k, $U_{k+1}, \dots, U_{l-1}, U_l$ t. zn. będzie:

(70) $$P = \sum_{j=k}^{j=l} C_j U_j$$

gdzie C_j oznaczają stałe współczynniki, które obliczymy w zależności od funkcyi U_j i $F(xy)$.

Z równania

$$u = \frac{P}{\xi - \xi'} + V$$

gdzie V przedstawia funkcyę holomorficzną w punkcie $\xi = \xi'$, otrzymujemy:

$$\int_{(D)} u U_j d\tau = \frac{C_j}{\xi - \xi'} + \int_D V U_j d\tau \qquad (j = k, k+1, k+2, \dots, l-1, l)$$

a więc jest

(71) $$C_j = (\xi - \xi')\left\{\int_{(D)} u U_j d\tau - \int_D V U_j d\tau\right\}$$

Różnicę ujętą w nawias przekształcimy. Stosujemy w tym celu twierdzenie Greena do funkcyi u, U_j; będzie:

$$\int_C \left(u \frac{dU_j}{dN} - U_j \frac{du}{dN}\right)_i ds + \int_{(D)} (u \Delta U_j - U_j \Delta u) d\tau = 0$$

a że jest wzdłuż krzywej C

$$h'\left(\frac{dU_j}{dN}\right)_i = h(U_j)_i \quad ; \quad h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i$$

a wewnątrz obszaru D

$$\Delta U_j + \xi' U_j = 0 \quad , \quad \Delta u + \xi u + F(xy) = 0$$

więc pierwsza całka lewej strony będzie zerem i pozostaje nam całka:

$$(\xi - \xi') \int_D u\, U_j\, d\tau + \int_{(D)} U_j F d\tau = 0$$

wskutek tego jest

$$C_j = -\int_{(D)} U_j F d\tau - (\xi - \xi') \int_D V U_j d\tau$$

teraz wolno położyć $\xi = \xi'$, wobec czego jest:

$$(72) \qquad C_j = -\int_{(D)} U_j(xy) F(xy) d\tau \qquad (j = k, k+1, \dots, l-1, l)$$

Oczywiście, gdyby wszystkie te całki były zerem, toby funkcya u bieguna ξ' nie posiadała.

Możemy więc powiedzieć, że, przeprowadzając analitycznie szereg $\sum_0^\infty u_k \eta^k$, poprzednio określony, otrzymamy funkcyę $u(xy)$, która poza biegunami swemi spełnia wewnątrz obszaru D równanie

$$\Delta u + \xi u + F(xy) = 0$$

a wzdłuż krzywej C równanie

$$h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i$$

Niech teraz liczba ξ' nie jest żadną z liczb ciągu:

$$(73) \qquad \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\dots, \xi_k, \dots\dots$$

wtedy równanie

$$\Delta u + \xi' u + F(xy) = 0$$

posiada, jak dopieroco widzieliśmy, rozwiązanie i to tylko jedno.

Różnica bowiem w dwóch rozwiązań spełniałaby warunki: żeby:

wewnątrz obszaru D $\qquad \Delta v + \xi' v = 0$

wzdłuż krzywej C $\qquad h'\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h(v)_i$

a taka funkcya musi być identycznie równa zeru, bo dla liczb ξ' różnych od liczb ciągu 73 funkcye harmoniczne, różne od zera nie istnieją.

Niech obecnie liczba ξ'' będzie jedną z liczb ciągu 73, ale niech nie będzie biegunem funkcyi $u(xy)$; różnica w dwóch rozwiązań spełnia następujące warunki:

wewnątrz obszaru D jest $\qquad \Delta v + \xi' v = 0$

wzdłuż krzywej C jest $h'\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h(v)_i$; da się więc funkcya v liniowo i jednorodnie wyrazić przez funkcye harmoniczne $U_k, U_{k+1}, \ldots, U_{l-1}, U_l$ należące do tej samej wartości parametru ξ; przeto ogólne rozwiązanie będzie miało postać

$$u(\xi') + \sum_{j=k}^{l} C_j U_j$$

jeżeli jest $\xi_{k-1} \neq \xi' = \xi_k = \xi_{k+1} = \ldots = \xi_{l-1} = \xi_l \neq \xi_l$; stałe C_j będą tu dowolne i nieokreślone.

§ 52. Wyprowadzimy jeszcze pewne ciekawe i potrzebne nam w dalszym ciągu wnioski.

Załóżmy, że funkcya $u(xy)$ spełnia wewnątrz obszaru D:

$$\Delta u + \xi u = 0$$

a wzdłuż krzywej C warunek: $h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \tau$, gdzie τ oznacza daną ciągłą funkcyę punktu krzywej C. Oczywiście dla $h' = 0$, funkcya h nie może przybierać wartości zero w żadnym punkcie C, bo w takim razie granica $(u)_i$ byłaby tamże nieokreślona lub nieograniczona.

Niech parametr ξ_0 będąc nawet zespolonym spełnia nierówności 18 (str. 40) i 49 (str. 46); jak wiadomo, zagadnienie dotyczące funkcyi v_0, która wewnątrz obszaru D spełnia równanie:

$$\Delta v_0 + \xi_0 v_0 = 0$$

a wzdłuż krzywej C równanie

$$h'\left(\frac{dv_0}{dN}\right)_i = h(v_0) + \tau$$

jest rozwiązalne i jak wiemy ze stromy 65 i 67 tylko w jeden sposób; kładąc

$$u = v_0 + (\xi - \xi_0) v'$$

otrzymujemy dla funkcyi v' następujące warunki: wewnątrz obszaru D ma być spełnione równanie

$$\Delta v' + \xi v' + v_0 = 0$$

a wzdłuż krzywej C ma być

$$h'\left(\frac{dv'}{dN}\right)_i = h(v')_i$$

Ponieważ funkcya v_0 może przyjąć na siebie rolę funkcyi F z § 48 (str. 99 i nast.), więc można do niej stosować te twierdzenia, które wyprowadziliśmy dla funkcyi $u(xy)$ w § 48 (str. 99 i nast.) i nast. Jeżeli np. liczba ξ jest różna od każdej liczby ciągu 73 (str. 116), to istnieje rozwiązanie v' i tylko jedno. Istnieje więc jedno

i tylko jedno rozwiązanie $u(xy)$ zagadnienia sformułowanego na początku obecnego paragrafu, jeżeli tylko wartość parametru ξ nie jest równa żadnej liczbie ciągu 73 (str 116).
Wobec tego, pamiętając o definicyi funkcyi Greena, możemy powiedzieć, że dla tych samych wartości ξ, istnieje funkcya Greena i tylko jedna. Kładąc bowiem

$$G(xy, x'y', \xi) = \frac{f(\xi \rho \mu)}{2\pi} - u$$

gdzie ρ oznacza odległość bieguna (xy) funkcyi Greena od punktu $(x'y')$, otrzymujemy, że funkcya u spełnia wewnątrz obszaru D równanie

$$\Delta u + \xi u = 0$$

a wzdłuż krzywej C równanie

$$h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \frac{1}{2\pi}\left(h'\frac{df(\xi\rho\mu)}{dN} - hf(\xi\rho\mu)\right)$$

Jeżeli więc parametr ξ nie jest równy żadnej z liczb ciągu 73 (str 116), to istnieje taka funkcya u i tylko jedna, a stąd istnieje ~~taka~~ funkcya Greena i tylko jedna. Ale skoro istnieje funkcya Greena, to napewne ma granicę skończoną pochodnej normalnej, jak to wykazaliśmy na str 73 i nast.).
Przypuśćmy teraz, że funkcya Greena G istnieje dla jednej z liczb ciągu 73 np. dla liczby ξ_K. Otoczmy biegun (xy) funkcyi Greena leżący wewnątrz obszaru D kołem Σ, takiem, by leżało wewnątrz obszaru D i napiszmy dla funkcyi u i G twierdzenie 55 (str 49), ale dla krzywej C i koła Σ, uważając N za normalną zewnętrzną; będzie:

$$\int_C \left(U_K\frac{dG}{dN} - G\frac{dU_K}{dN}\right)_i ds + \int_\Sigma \left(U_K\frac{dG}{dN} - G\frac{dU_K}{dN}\right) ds = 0$$

pierwsza całka będzie zerem, druga ma granicę $(-U_K(xy))$, gdy koło Σ ściąga się do swego punktu środkowego; otrzymaliśmy więc:

$$-U_K(xy) = 0$$

a że punkt (xy) jest dowolnym punktem, wewnątrz obszaru D położonym, więc jest stale $U_K \equiv 0$ wbrew założeniu, że funkcya harmoniczna U_K identycznie zerem nie jest.
Dla punktów ciągu 73 (str 116) funkcye Greena istnieć więc nie mogą.

VI Rozwinięcia na szeregi funkcyi harmonicznych.

§ 53. Udowodnimy najpierw, że dwa twierdzenia, poniżej wysłowione, które p. Zaremba nazywa twierdzeniami Ścikłowa w swej przeremie

w przedmowie cytowanej pracy, pozostają i dla dwóch zmiennych prawdziwe.

Oznaczmy przez $U_k(xy)$ funkcye harmoniczne, jak w poprzednim rozdziale, uporządkowane; niech $F(xy)$ oznacza dowolną funkcyę nieczystą w obszarze D o tyle określoną co najmniej, iż całka

$$(1) \qquad L = \int_D \left(F(x'y')\right)^2 d\tau$$

ma sens określony.

Połóżmy

$$(2) \qquad A_k = \int_D F(x'y') U_k(x'y') d\tau \qquad (k=1,2,\ldots)$$

i uważajmy różnicę:

$$(3) \qquad F_n(x'y') = F(x'y') - \sum_1^n A_k U_k(x'y')$$

przez podniesienie tej równości do drugiej potęgi, scałkowanie na cały obszar D i zastosowanie własności funkcyi U_k, zawartych w równościach 65 (str 114) otrzymujemy, że jest:

$$(4) \qquad \int_{(D)} F_n^2(x'y') d\tau = L - \sum_1^n A_k^2$$

ponieważ strona lewa tej równości jest nieujemna, więc jest

$$\sum_1^n A_k^2 \leq L$$

ale szereg $\sum_1^n A_k^2$, jako funkcya ilości wyrazów jest nie malejącą, a ponieważ jest nie większą od liczby L, przeto ma granicę, gdy liczbe n rośnie nieograniczenie czyli szereg $\sum_1^\infty A_k^2$ jest zbieżny i nadto jest

$$(5) \qquad \sum_1^\infty A_k^2 \leq \int F^2(x'y') d\tau$$

To stanowi pierwsze t. zw. twierdzenie Schiktowa.

Niech powyższa funkcya $F(xy)$ jeszcze posiada pochodne pierwsze $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ ciągłe, prócz może w jednym punkcie x_0y_0, położonym wewnątrz obszaru D, gdzie mogą nawet nie istnieć pochodne, ale w okolicy tego punktu mają być ograniczone.

Niech $u(xy)$ oznacza funkcyę, spełniającą wewnątrz obszaru D równanie

$$\Delta u + \xi u + F = 0$$

a wzdłuż krzywej C równanie $\qquad h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i$; będzie więc $u(xy)$ funkcyą zbadaną w poprzednim rozdziale, bo jak widać z rozważania § 28 (str 55) wszystkie rezultaty poprzedniego rozdziału będą się obecnie stosowały, mimo, iż może funkcya F jest ogólniej-

sza od funkcyi F poprzedniego rozdziału. Jeżeli wartość parametru ξ nie jest równa żadnej z liczb ciągu 73 (str. 116), to istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie, zbieżne, jako szereg, w pewnem kole Σ o promieniu R, który jest granicą ciągu:

(6) $$\frac{\dot{I}_{-1}}{I_0},\ \frac{\dot{I}_0}{I_1},\ \frac{I_1}{I_2}, \dots$$

określonego w rozdziale poprzedzającym. Otóż wskutek założeń o funkcyi F możemy ten ciąg uzupełnić. Położymy:

$$\dot{I}_{-2} = \int_D \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y} + \xi_0 u_0 F \right\} d\tau + \int_C h u_0 F ds$$

$$I_{-3} = \int_D \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 F^2 \right\} d\tau + \int_C h F^2 ds$$

jeżeli pamiętamy o założeniu co do liczby ξ_0, to całka $\dot{I}_{-3}$ będzie dodatnią, nadto będzie

$$\dot{I}_{-2} = \int_D F^2 d\tau$$

jak w poprzednim rozdziale; kładąc w całce 33 bis (str. 105):

$$U = \lambda F + l u_0$$

otrzymamy formę kwadratową względem stałych l, λ po stronie lewej nierówności tej, a że ta forma kwadratowa ma być dodatnią, więc jej wyróżnik musi być ujemny; przeto będzie:

(7) $$\dot{I}_{-2} \leq \dot{I}_{-3} \cdot \dot{I}_{-1}$$

a, że jest

$$\dot{I}_{-1} = \int_D \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 u^2 \right\} d\tau + \int_C h u_0^2 ds = \int_D u_0 F d\tau$$

więc jest na mocy nierówności Schwarza:

(8) $$I_{-1}^2 \leq I_{-2} \cdot I_0$$

Na mocy nierówności 7 i 8 można ciąg 6 uzupełnić, tak, że jego pierwszym i drugim wyrazem będzie:

(9) $$\frac{\dot{I}_{-3}}{I_{-2}};\ \frac{I_{-2}}{I_{-1}}$$

a mimo to ciąg taki będzie nadal nigdy nierosnącym, więc jest:

(10) $$\frac{\dot{I}_{-3}}{\dot{I}_{-2}} \geqslant R$$

Jeżeli teraz przez $I_p^{(n)}, R_n$ oznaczymy wielkości, w które przechodzą wielkości I_p, R, gdy zamiast funkcyi F podstawimy (co nam wolno) funkcyę F_n określoną równością 3 (str. 119), to według nierówności 10 będziemy mieli

(11) $$\frac{I_{-3}^{(n)}}{I_{-2}^{(n)}} \geqslant R_n$$

Zbadajmy wielkości R_n, a więc uważajmy bieguny funkcyi $u(xy)$

z którą przechodzi funkcya u, gdy zamiast funkcyi $F(xy)$ podstawiliśmy funkcyę $F_n(xy)$; obliczmy residua tej funkcyi $u'(xy)$; na mocy równości 72 (str 116) ~~otrzymaje~~ strony z równości 3 (str 119) następujące wyrażenia:

$$\int_{(D)} F_n U_j \, d\tau = \int_D F U_j \, d\tau - \sum_1^n A_k \int_{(D)} U_k U_j \, d\tau$$

na mocy równania 2 (str 119) i równości 65 (str 114) otrzymujemy

$$\int_{(D)} F_n U_j \, d\tau = A_j - A_j = 0 \quad \text{dla} \quad j \leq n$$

dla $j > n$:

$$\int_D F_n U_j \, d\tau = A_j$$

Z tego wynika, że funkcya u' posiadać może dopiero liczby $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots$ jako bieguny, a że zachodzi nierówność 69 (str 115), więc promień R_n rośnie wraz z liczbą n nieograniczenie. Zbadajmy więc z powodu nierówności 11 (str 120) licznik stosunku strony lewej i mianownik. Otóż jest

$$I_{-3}^{(n)} = \int_D \left\{ \left(\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_n}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 F_n^2 \right\} d\tau + \int_C h F_n^2 \, ds = \int_D \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 F^2 \right\} d\tau + \int_C h F^2 \, ds -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^n A_k \int_D \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial U_k}{\partial y} \right) d\tau + \sum_1^n A_k^2 \int_D \left\{ \left(\frac{\partial U_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_k}{\partial y}\right)^2 \right\} d\tau - 2\xi_0 \sum_1^n A_k^2 + \xi_0 \sum_1^n A_k^2 -$$

$$- \sum_1^n 2A_k \int_C h F U_k \, ds + \sum_1^n A_k^2 \int_C h U_k^2 \, ds$$

a że jest

$$\int_D \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial U_k}{\partial y} \right) d\tau = A_k \xi_k - \int_C F \frac{dU_k}{dN} \, ds$$

$$\int_D \left\{ \left(\frac{\partial U_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_k}{\partial y}\right)^2 \right\} d\tau = \xi_k \int_D U_k^2 \, d\tau - \int_C U_k \frac{dU_k}{dN} \, ds = \xi_k - \int_C U_k \frac{dU_k}{dN} \, ds$$

więc jest:

$$I_{-3}^{(n)} = \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \xi_0 F^2 \right\} d\tau + \int_C h F^2 \, ds - 2 \sum_1^n A_k^2 \xi_k + 2 \sum_1^n A_k \int_C F \frac{dU_k}{dN} \, ds +$$

$$+ \sum_1^n A_k^2 \xi_k - \sum_1^n A_k^2 \int_C U_k \frac{dU_k}{dN} \, ds - \xi_0 \sum_1^n A_k^2 - 2 \sum_1^n A_k \int_C h F U_k \, ds +$$

$$+ \sum_1^n A_k^2 \int_C h U_k^2 \, ds$$

Uważajmy najpierw wypadek $h' = 0$; jak wiadomo, wzdłuż krzywej C jest stale $(U_k)_i = 0$ **); wskutek tego jest

**) Opuszczaliśmy powyżej znaczek na granicę z powodu prostoty pisma a braku dwuznaczności, przez to osiągniętej.

$$I_{-3}^{(n)} = \iint_{D}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\xi_0 F^2\right\}d\tau + \int_C hF^2 ds - \sum_1^n A_k^2\xi_k + 2\sum_1^n A_k\int_C hFU_k ds - \xi_0\sum_1^n A_k^2$$

jak wiemy, liczba $I_{-3}^{(n)}$ jest wielkością stale dodatnią, gdy się odpowiednio dobrało liczbę dodatnią ξ_0 i stąd bynajmniej nie można w ogóle przewidzieć, czy wyrażenie $I_{-3}^{(n)}$ rośnie czy maleje dla liczby n rosnącej nieograniczenie. Jeżeli zaś założymy, że jest wzdłuż krzywej C

$$(F)_i = 0$$

to wtedy jest

$$I_{-3}^{(n)} = \int_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\xi_0 F^2\right\}d\tau - \sum_1^n A_k^2(\xi_k+\xi_0)$$

i stąd widać, że wyrażenie to maleje, gdy liczba n rośnie nieograniczenie, a że jest stale dodatnie, więc dla rosnącej liczby n nieograniczenie zbliża się do określonej, skończonej granicy. Jeżeli więc stosunek $\frac{I_{-3}^{(n)}}{I_{-2}^{(n)}}$ ma róść nieograniczenie, to musi koniecznie mianownik dążyć do zera, więc jest

$$\lim_{n=\infty}\left(I_{-2}^{(n)}\right) = 0$$

a że jest

$$I_{-2}^{(n)} = \int_D F_n^2 d\tau = \int_D F^2 d\tau - \sum_1^n A_k^2$$

więc otrzymaliśmy, że jest

(12) $$\int_{(D)} F^2 d\tau = \sum_1^\infty A_k^2$$

co chcieliśmy wyprowadzić.

Połóżmy teraz $h'=1$; w tym wypadku funkcye harmoniczne U_k spełniają warunek $\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i = h(U_k)_i$

wzdłuż krzywej C a więc jest

$$I_{-3}^{(n)} = \int_{(D)}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\xi_0 F^2\right\}d\tau + \int_C hF^2 ds - \sum_1^n A_k^2\xi_k - \xi_0\sum_1^n A_k^2$$

jak widać wielkość ta maleje, gdy liczba n rośnie nieograniczenie mimo, że nie założymy na funkcyę $F(xy)$ dodatkowo warunku, a więc wolno i w tym wypadku zrobić pewne dodatkowe założenie o funkcyi $F(xy)$, choć to nie jest obecnie konieczne; możemy np. żądać, aby funkcya $F(xy)$ czyniła zadość warunkowi

(13) $$h'\left(\frac{dF}{dN}\right)_i = h(F)_i$$

wzdłuż krzywej C, który w wypadku $h'=0$ staje się identyczny z warunkiem, który musieliśmy przyjąć w owym wypadku. Dalszy ciąg rozumowania będzie taki sam, jak dla wypadku $h'=0$ i prowadzić będzie znów do równości 12 (str 122).
To stanowi t.zw. drugie twierdzenie Ścisłowa.

§54. Uważajmy teraz dwie funkcye Greena: $G(x_0y_0, xy, \xi)$, $G(x_0y_0, xy, \xi')$ obszaru D o wspólnym biegunie (x_0y_0) leżącym wewnątrz obszaru D i o parametrach ξ, ξ' i utwórzmy funkcyę

$$(13)\qquad \psi(x_0y_0, xy, \xi, \xi') = \frac{G(x_0y_0, xy, \xi) - G(x_0y_0, xy, \xi')}{\xi - \xi'}$$

Funkcya ta będzie ciągłą w całym obszarze D, będzie miała ciągłe pierwsze pochodne wewnątrz obszaru D prócz w punkcie (x_0y_0), ale w jego otoczeniu będą te pochodne ograniczone.
nadto jest

$$\Delta\psi = \frac{\Delta G(\xi) - \Delta G(\xi')}{\xi - \xi'} = -\xi\psi - G(\xi')$$

czyli

$$(14)\qquad \Delta\psi(x_0y_0, xy, \xi, \xi') + \xi\psi(x_0y_0, xy, \xi, \xi') + G(x_0y_0, xy, \xi') = 0$$

w każdym punkcie xy różnym od punktu x_0y_0 i leżącym wewnątrz obszaru D; wzdłuż krzywej C jest

$$(15)\qquad h'\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i = h(\psi)_i$$

Połóżmy

$$(16)\qquad \psi = \psi_1 + i\psi_2$$

gdzie funkcye ψ_1, ψ_2 są rzeczywiste i można do nich stosować drugie z „twierdzeń Ścisłowa". A więc jest:

$$(17)\qquad \begin{aligned} \int_D \psi_1^2(x_0y_0, x'y', \xi, \xi')\,d\tau &= \sum_1^\infty A_k^2 \\ \int_D \psi_2^2(x_0y_0, x'y', \xi, \xi')\,d\tau &= \sum_1^\infty B_k^2 \end{aligned}$$

przyczem przez $x'y'$ oznaczyliśmy współrzędne bieżącego punktu obszaru D. Jest:

$$(18)\qquad \begin{aligned} A_k &= \int_{(D)} \psi_1(x_0y_0, x'y', \xi, \xi')\,U_k(x'y')\,d\tau \\ B_k &= \int_D \psi_2(x_0y_0, x'y', \xi, \xi')\,U_k(x'y')\,d\tau \end{aligned}$$

Otoczmy teraz punkt (x_0y_0) kołem Σ_0 takiem, aby leżało wewnątrz obszaru D i do obszaru d, powstałego z obszaru D przez usunięcie wnętrza koła Σ_0 zastosujmy twierdzenie Greena; kładąc $\xi = \alpha + i\beta$, $G(\xi) = G_1(\xi) + iG_2(\xi)$

otrzymamy ostatecznie

$$\int\limits_{(C+\Sigma_0)} \left\{ U_k(x'y') \frac{dG_1(x_0y_0, x'y', \xi)}{dN} - G_1(x_0y_0, x'y', \xi) \frac{dU_k(x'y')}{dN} \right\} ds + \int\limits_{(\mathfrak{D})} (U_k \Delta G_1 - G_1 \Delta U_k)\, d\tau = 0$$

przechodząc z kołem Σ_0 do granicy, w ten sposób, że je ściągamy do punktu (x_0y_0), otrzymujemy:

$$(18) \quad -U_k(x_0y_0) + \int\limits_{(\mathfrak{D})} \left\{ U_k(x'y') \left[\beta G_2(x_0y_0, x'y', \xi) - \alpha G_1(x_0y_0, x'y', \xi) \right] + \xi_k U_k(x'y') G_1(x_0y_0, x'y', \xi) \right\} d\tau = 0$$

podobnie otrzymamy

$$(19) \quad \int\limits_{(\mathfrak{D})} \left\{ U_k(x'y') \left[-\alpha G_2(x_0y_0, x'y', \xi) - \beta G_1(x_0y_0, x'y', \xi) \right] + \xi_k U_k(x'y') G_2(x_0y_0, x'y', \xi) \right\} d\tau = 0$$

Mnożąc równość 19 przez liczbę (i) i dodając ją do równości 18 otrzymujemy ostatecznie, że jest

$$(20) \quad U_k(x_0y_0) = (\xi_k - \xi) \int\limits_{(\mathfrak{D})} U_k(x'y') G(x_0y_0, x'y', \xi)\, d\tau$$

analogicznie będzie

$$U_k(x_0y_0) = (\xi_k - \xi') \int\limits_{(\mathfrak{D})} U_k(x'y') G(x_0y_0, x'y', \xi')\, d\tau$$

a z obu równości ostatnich i równości 13 (str. 123)

$$(20\text{ bis}) \quad \frac{U_k(x_0y_0)}{(\xi - \xi_k)(\xi' - \xi_k)} = \int\limits_{(\mathfrak{D})} U_k(x'y') \psi(x_0y_0, x'y', \xi, \xi')\, d\tau$$

czyli jest na mocy równości 18 (str. 123) także

$$\frac{U_k(x_0y_0)}{(\xi - \xi_k)(\xi' - \xi_k)} = A_k + iB_k$$

a stąd jest

$$(21) \quad A_k^2 + B_k^2 = \frac{U_k^2(x_0y_0)}{|(\xi - \xi_k)(\xi' - \xi_k)|^2}$$

a stąd i z równości 17 (str. 123) wnioskujemy, że jest:

$$(22) \quad \int\limits_{(\mathfrak{D})} |\psi(x_0y_0, x'y', \xi, \xi')|^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2(x_0y_0)}{|(\xi - \xi_k)(\xi' - \xi_k)|^2}$$

Nie potrzeba dodawać, że parametry ξ i ξ' nie mogą być równe żadnej z liczb ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, bo dla liczb ξ_k, jak wykazaliśmy funkcye Greena nie istnieje.

Szereg strony lewej równości 22 jest szeregiem zbieżnym, jakakolwiek jest wartość liczb (x_0y_0), byle punkt x_0y_0 leżał wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$, jest bowiem, jak widzieliśmy sumą dwóch zbieżnych szeregów.

Udowodnimy, że jest on w obszarze $\mathfrak{D}$ szeregiem jednostajnie zbieżnym. Zajmijmy się w tym celu ogólniejszem zagadnieniem; uważajmy

szereg

$$(23)\qquad H(x_0y_0, x'y', \xi, \xi') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k(x'y')U_k(x_0y_0)}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}$$

i udowodnijmy, że szereg ten jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny, jakiekolwiek położenie mają punkty (x_0y_0) i $(x'y')$ w obszarze D, o ile parametry ξ, ξ' są różne od liczb ξ_k $(k=1,2,\dots)$

Otóż jest

$$\left|\frac{U_k(x'y')U_k(x_0y_0)}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}\right| < \frac{1}{2}\left\{\frac{U_k^2(x'y')}{|\xi-\xi_k|^2} + \frac{U_k^2(x_0y_0)}{|\xi'-\xi_k|^2}\right\}$$

więc dość nam zbadać szeregi:

$$\sum_1^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{|\xi-\xi_k|^2}\ ; \quad \sum_1^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{|\xi'-\xi_k|^2}$$

gdzie liczby (xy) mogą mieć wartość $(x'y')$ lub (x_0y_0).

W tym celu zbadamy szereg $\sum_n^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{\xi_k^2}$, gdzie n jest odpowiednio dobraną liczbą.

§ 55. Niech m oznacza liczbę rzeczywistą i dodatnią, ρ liczbę rzeczywistą i dodatnią, która jest większą z liczb $\frac{16c^2}{\delta^2}$, $64c^2H^2$, gdzie H oznacza górną granicę modułu funkcyi h. Gdy więc jest

$$(24)\qquad m > \rho$$

to istnieje funkcya Greena $G(xy, x'y', -m)$ o biegunie w punkcie $(x'y')$ i nadto będzie funkcyą rzeczywistą. Ponieważ całka:

$$\int G^2(xy, x'y', -m)\,d\tau$$

ma sens, przeto stosując pierwsze z tzw. twierdzeń Ścibora (str 119)[2]

otrzymujemy nierówność:

$$(25)\qquad \sum_1^{\infty} A_k^2 \leq \int_D G^2(xy, x'y', -m)\,d\tau$$

jeżeli położymy

$$(26)\qquad A_k = \int U_k(x'y')\,G(xy, x'y', -m)\,d\tau$$

Kładąc w równości 20 (str 125) liczby xy zamiast liczb (x_0y_0), liczbę $(-m)$ zamiast liczby ξ, otrzymamy na mocy równości 26:

$$(27)\qquad A_k = \frac{U_k(xy)}{m+\xi_k}$$

przeto nierówność 25 przybierze postać:

$$\sum_1^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{(m+\xi_k)^2} \leq \mathring{I}(xy)$$

gdzie $\mathring{I}(xy)$ jest wielkością zbadaną w rozdziale czwartym (str 84 i nast.); ponieważ obecnie liczba $\xi = -m$ spełnia nierówności 18 (str 40) i 49 (str 46), bo spełnia nierówność 24 liczba m, więc według nierówności 73 (str 90) będzie:

$$(28) \qquad \dot{I}(xy) < (4c+2)^2 \cdot \frac{1}{m}$$

gdyż obecnie jest $\rho_1 = m$, $\Theta = \pi$.

Nadto zauważmy, że, gdy liczba n nie jest mniejsza od pewnej, stałej, dodatniej N, to nawet w wypadku $h=1$ liczby ξ_n będą już dodatnie i większe od ρ_0 i wobec tego wolno będzie przyjąć $m = \xi_n$, bo dla takich liczb $(-\xi_n)$ będą istniały funkcye Greena i będzie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{(\xi_n + \xi_k)^2} < \frac{(4c+2)^2}{\xi_n}$$

i tem bardziej będzie

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{(\xi_n + \xi_k)^2} < \frac{(4c+2)^2}{\xi_n}$$

ale dla $k \geq n \geq N$ jest każda liczba ~~dodatnia~~ ξ_k i ξ_n dodatnia i jest $\xi_k \geq \xi_n$, a więc jest

$$(29) \qquad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{\xi_k^2} < \frac{(4c+2)^2}{\xi_n} \qquad (n \geq N)$$

gdy punkt xy znajdujący się wewnątrz obszaru D dąży nieograniczenie do dowolnego punktu krzywej C to licznik ~~ułamków~~ ułamków strony lewej będą miały granicę $(U_k^2(xy))_i$, i co najwyżej znak równości mógłby zastąpić znak nierówności.

Teraz możemy przystąpić do zbadania szeregu

$$(30) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{|\xi - \xi_k|^2}$$

Otóż można taką stałą i dodatnią liczbę N' obrać, by dla wszystkich liczb całkowitych $k \geq N'$ było:

$$\left|\frac{\xi}{\xi_k}\right| < \frac{1}{A}$$

gdzie A jest liczbą rzeczywistą, dodatnią i dowolną, byle było

$$A > 1$$

wobec tego jest

$$\frac{\xi_k^2}{|\xi - \xi_k|^2} < \frac{A^2}{(A-1)^2}$$

Oznaczając przez ~~n~~ n' liczbę większą z liczb N i N' otrzymujemy

$$\sum_{n'}^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{|\xi - \xi_k|^2} = \sum_{n'}^{\infty} \frac{U_k^2(xy)}{\xi_k^2} \cdot \frac{\xi_k^2}{|\xi - \xi_k|^2} < \left(\frac{A}{A-1}\right)^2 \cdot \frac{(4c+2)^2}{\xi_{n'}}$$

co ma miejsce dla dowolnego położenia punktu (xy) wewnątrz obszaru D; wyraża ono, że szereg 30 jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w obszarze D. Na podstawie tego wyniku wolno nam ogólnie powiedzieć, że, o ile

parametry ξ i ξ' są różne od liczb ξ_κ $(\kappa=1,2,\dots)$, to szeregi równości 22 (str. 124) i szereg 23 są jednostajnie i bezwzględnie zbieżne.

§ 56. Postaramy się funkcyę $\psi(x_0y_0, xy, \xi, \xi')$ z § 54 (str. 123) rozwinąć na szereg funkcyi harmonicznych.

Uważajmy w tym celu funkcyę

(31) $$\varphi(x'y') = \psi(x_0y_0, x'y', \xi, \xi') - H(x_0y_0, x'y', \xi, \xi')$$

Kładąc

$$\psi = \psi_1 + i\psi_2 \quad ; \quad H = H_1 + iH_2$$

gdzie funkcye ψ_1, ψ_2, H_1, H_2 są już rzeczywiste, otrzymujemy, że jest:

(32) $$|\varphi|^2 = (\psi_1 - H_1)^2 + (\psi_2 - H_2)^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2 + H_1^2 + H_2^2 - 2(\psi_1 H_1 + \psi_2 H_2)$$

Scałkujmy tę równość na cały obszar D. Całkę $\int\limits_{(D)} (\psi_1^2 + \psi_2^2)\,d\tau$ już obliczyliśmy, wyraża ją wzór 22 (str. 124). Jeżeli położymy:

$$(\xi - \xi_\kappa)(\xi' - \xi_\kappa) = r_\kappa e^{i\vartheta_\kappa}$$

gdzie liczby $r_\kappa, \vartheta_\kappa$ są rzeczywiste, to z równości 23 (str. 125) otrzymamy:

$$H_1 = \sum_1^\infty \frac{U_\kappa(x'y')\,U_\kappa(x_0y_0)}{r_\kappa} \cos\vartheta_\kappa \quad , \quad H_2 = -\sum_1^\infty \frac{U_\kappa(x'y')\,U_\kappa(x_0y_0)}{r_\kappa} \sin\vartheta_\kappa$$

więc z powodu jednostajnej zbieżności tych szeregów w obszarze D będzie:

$$\int\limits_{(D)} \{H_1^2 + H_2^2\}\,d\tau = \sum_1^\infty \frac{U_\kappa^2(x_0y_0)}{\left|(\xi-\xi_\kappa)(\xi'-\xi_\kappa)\right|^2}$$

Aby obliczyć całkę $\int\limits_{(D)} (\psi_1 H_1 + \psi_2 H_2)\,d\tau$ zauważmy, że ona jest częścią rzeczywistą całki

$$\int\limits_{(D)} \psi(H_1 - iH_2)\,d\tau = \int\limits_{(D)} \psi\left(\sum_1^\infty \frac{U_\kappa(x'y')\,U_\kappa(x_0y_0)}{r_\kappa} \cdot e^{i\vartheta_\kappa}\right) d\tau$$

a że równanie 20 bis (str. 124) daje nam:

$$\frac{U_\kappa(x_0y_0)}{r_\kappa e^{i\vartheta_\kappa}} = \int\limits_{(D)} U_\kappa(x'y')\,\psi(x_0y_0, x'y', \xi, \xi')\,d\tau$$

więc ostatecznie będzie

$$\int\limits_{(D)} (\psi_1 H_1 + \psi_2 H_2)\,d\tau = \sum_1^\infty \frac{U_\kappa^2(x_0y_0)}{\left|(\xi-\xi_\kappa)(\xi'-\xi_\kappa)\right|^2}$$

wskutek tego jest

$$\int\limits_{(D)} |\varphi|^2\,d\tau = 0$$

przeto jest w całym obszarze D $\quad \varphi \equiv 0$; z równości tej i z równości 31 i 23 (str. 125) wynika, że jest

(33) $$\psi(x_0y_0, x'y', \xi, \xi') = \sum_1^\infty \frac{U_\kappa(x'y')\,U_\kappa(x_0y_0)}{(\xi-\xi_\kappa)(\xi'-\xi_\kappa)}$$

przyczem szereg strony prawej, jak wykazaliśmy, jest szeregiem jednostajnie i bezwzględnie zbieżnym w obszarze D, o ile parametry ξ i ξ' nie równają

się żadnej z liczb ξ_k $(k=1,2,\dots)$. Zbadajmy jeszcze szereg ten w zależności od parametru ξ i ξ'. W tym celu uważajmy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ dowolne koło Σ_1 zatoczone ze środka współrzędnych; rozdzielmy szereg ψ na dwie części:

$$\psi = \psi' + \psi''$$

gdzie ψ' oznacza ogół tych wyrazów szeregu, dla których obraz geometryczny liczby ξ_k, zawartej w nich, leży wewnątrz koła Σ_1 lub na jego obwodzie; pozostałe wyrazy oznaczmy przez ψ''. Jeżeli obrazy geometryczne liczb ξ i ξ' będą leżały wewnątrz koła Σ_1, to szereg ψ'' jak widzieliśmy, jest funkcyą analityczną zmiennych ξ i ξ', gdy koło Σ_1 jest współśrodkowe z kołem Σ_1, a o mniejszym promieniu, niż koło Σ_1; funkcya ψ', jako złożona ze skończonej ilości wyrazów, będzie funkcyą meromorficzną o biegunach ξ_k. Innemi słowy: szereg ψ jest funkcyą meromorficzną parametrów ξ i ξ', której biegunami są liczby ξ_k, $(k=1,2,3,\dots)$

Z definicyi funkcyi $\psi(x_0y_0, xy, \xi, \xi')$ (str. 123) wynika, że jest

(34) $$G(x_0y_0, xy, \xi) = G(x_0y_0, xy, \xi') + (\xi - \xi')\sum_1^\infty \frac{U_k(x_0y_0)\,U_k(xy)}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}$$

To rozwinięcie funkcyi Greena na szereg funkcyi harmonicznych tłomaczy nam fakt, że jeżeli parametr ξ jest takim, iż funkcya Greena istnieje, to nie istnieje funkcya Greena, gdy jest $\xi = \xi_k$, że właśnie liczby ξ_k są biegunami funkcyi Greena, i że jej residuum dla bieguna ξ_k jest funkcya $[-U_k(x_0y_0)\,U_k(xy)]$.

§ 57. Możemy teraz wyprowadzić nierówności na całki

$$I(xy) = \int_{(D)} \left| g(xy, x'y', \xi)\,d\tau \right|^2$$

które dotąd obliczyliśmy we wypadku, gdy parametr ξ czynił zadość pewnym nierównościom.

Połóżmy

$$\xi = \alpha + i\beta \quad ; \quad \xi' = \alpha - i\beta$$

$$G(x_0y_0, xy, \xi) = G_1 + iG_2$$

$$G(x_0y_0, xy, \xi') = \overline{G}_1 + i\overline{G}_2$$

gdzie funkcye $G_1, G_2, \overline{G}_1, \overline{G}_2$ są rzeczywiste i czynią zadość równaniom

(35) $$\begin{aligned} \Delta G_1 + \alpha G_1 - \beta G_2 &= 0 \\ \Delta G_2 + \alpha G_2 + \beta G_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta \overline{G}_1 + \alpha \overline{G}_1 + \beta \overline{G}_2 &= 0 \\ \Delta \overline{G}_2 + \alpha \overline{G}_2 - \beta \overline{G}_1 &= 0 \end{aligned}$$

wewnątrz obszaru D; widać, że, gdy położymy*)

$$\overline{G}_1 = G_1 \ ; \quad \overline{G}_2 = -G_2$$

*) Nie wolno położyć $G_1 = G_2$, $G_2 = G_1$, bo funkcye G_2, $\overline{G}_2$ są ciągłe w biegunie (x_0y_0) funkcyi Greena.

to lewy układ równań 35 przechodzi w prawy, więc z jednoznaczności funkcyi Greena wynika, że jest

$$G(x_0 y_0, xy; \xi') = G_1 - i G_2$$

nadto przez taką równość wszystkie własności pozostałe funkcyi Greena będą zachowane.

Z równości 34 (str. 128) i obecnej wynika, że jest

$$G_1 + i G_2 = G_1 - i G_2 + 2i\beta \sum_1^\infty \frac{U_k(x_0 y_0) U_k(xy)}{(\alpha - \xi_k)^2 + \beta^2}$$

a stąd

$$G_2(x_0 y_0, xy, \xi) = \beta \sum_1^\infty \frac{U_k(x_0 y_0) U_k(xy)}{(\alpha - \xi_k)^2 + \beta^2}$$

wskutek równości 57 (str. 85) i 61 (str. 86) wynika stąd, że jest

$$(36) \qquad \dot{I}(xy) = \sum_1^\infty \frac{U_k^2(xy)}{(\alpha - \xi_k)^2 + \beta^2}$$

strona prawa jest szeregiem jednostajnie zbieżnym w obszarze D, jak to można wykazać sposobem przez nas używanym.

Załóżmy, że obok funkcyi Greena $G(x_0 y_0; xy, \xi)$ mamy funkcyę Greena $G(x_0 y_0, xy, \xi')$ o tym samym biegunie $x_0 y_0$, co poprzednia i dla tego samego obszaru D, nadto parametr

$$\xi' = \rho_1' (\cos\theta' + i \sin\theta')$$

jest tak dobrany, że czyni zadość warunkom:

$$(37) \qquad \frac{c}{\mathcal{L}\sqrt{\rho_1'}\sin^2\frac{\theta'}{2}} \leq \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{cH}{\sqrt{\rho_1'}\sin\frac{\theta'}{2}} \leq \frac{1}{8}$$

pierwszemu z nich we wypadku $h' = 0$, obydwom zaś we wypadku $h' = 1$. Niech będzie

$$\xi = \rho_1 (\cos\theta + i \sin\theta)$$

i niech zarazem parametr ξ' będzie takim, iż jest

$$(38) \qquad \rho_1 \cos\theta = \rho_1' \cos\theta'$$

Wskutek tego, że parametr ξ' czyni zadość warunkom 37 będzie na mocy nierówności 73 (str. 90)

$$(39) \qquad \int_{(D)} |G(xy, x'y', \xi')|^2 d\tau < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta'}{2}} + 2\right)^2 \frac{1}{\rho_1' \sin^2\frac{\theta'}{2}}$$

kładąc $\xi' = \alpha' + i\beta'$ mamy obok równości 36, którą przepiszemy we formie:

$$\int_{(D)} |G(xy, x'y', \xi)|^2 d\tau = \sum_1^\infty \frac{U_k^2(xy)}{(\alpha - \xi_k)^2 + \beta^2}$$

także równość

$$\int_{(D)} |G(xy, x'y', \xi')|^2 d\tau = \sum_1^\infty \frac{U_k^2(xy)}{(\alpha' - \xi_k)^2 + \beta'^2}$$

Znajdźmy górną granicę stosunku stron lewych ostatnich równości.
W tym celu połóżmy

$$\frac{U_k^2(xy)}{(\alpha-\xi_k)^2+\beta^2} = A_k \quad ; \quad \frac{U_k^2(xy)}{(\alpha'-\xi_k)^2+\beta'^2} = B_k$$

a stąd jest
$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{(\alpha'-\xi_k)^2+\beta'^2}{(\alpha-\xi_k)^2+\beta^2} = C_k$$
jeżeli przez C_k oznaczymy wartość tego stosunku i wobec tego mamy:

$$\frac{\sum_1^\infty A_k}{\sum_1^\infty B_k} = \frac{\sum_1^\infty B_k C_k}{\sum_1^\infty B_k} \leq Max(C_k)$$

jeżeli tylko takie maximum stosunków C_k $(k=1,2,\dots)$ istnieje.
Jeżeli przez X, X' i M_k oznaczymy obrazy geometryczne liczb ξ, ξ' i ξ_k na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ, to jest

$$C_k = \frac{\overline{X'M_k}^2}{\overline{XM_k}^2}$$

Zawsze jest oczywiście
$$|\beta'| > |\beta|$$
i liczby β', β można przyjąć jako równoczesnekowe. Z powodu naszych założeń o liczbach ξ, ξ' będzie linia XX' prostopadła do osi rzeczywistych i niech punkt P będzie punktem przecięcia się obu tych prostych i oznaczmy:
$$\overline{X'P} = \sigma, \quad \overline{XP} = \tau, \quad \overline{PM_k} = \lambda_k$$
oczywiście będzie
$$\sigma > \tau$$
i jak łatwo się przekonać, otrzymamy maximum na stosunek C_k:
$$C_k = \frac{\sigma^2+\lambda_k^2}{\tau^2+\lambda_k^2}$$
biorąc minimum na długość λ_k; niech więc odległości punktów X i X' od najbliższego punktu M_k wynoszą l, względnie l', to będzie
$$Max(C_k) = \frac{l'^2}{l^2}$$
Wskutek tego jest:
$$\frac{\int_{(D)} |g(\xi)|^2 d\tau}{\int_{(D)} |g(\xi')|^2 d\tau} \leq \frac{l'^2}{l^2}$$

a stąd na mocy nierówności 39 (str 120) otrzymujemy:

(40) $$\int_{(D)} |g(\xi)|^2 d\tau < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta'}{2}} + 2\right)^2 \frac{1}{\rho_1' \sin^2\frac{\theta'}{2}} \cdot \frac{l'^2}{l^2}$$

a tę nierówność chcieliśmy wyprowadzić.

§58. Uważajmy całkę:

(41) $$W(x,y,\xi) = \int_{(D)} F(x'y')\, g(xy, x'y', \xi)\, d\tau$$

przyczem o funkcyi $F(x'y')$ założymy, że może być nawet zespolona, byle tylko całka:

(42) $$\mathcal{L} = \int_{(D)} |F(x'y')|^2 d\tau$$

miała sens. Z równości 34 (str 128) otrzymujemy

$$g(xy,x'y',\xi) - g(xy,x'y',\xi') = (\xi-\xi')\sum_1^\infty \frac{U_k(xy)\,U_k(x'y')}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}$$

przyczem wykazaliśmy, że o ile parametry ξ, ξ' są różne od liczb ξ_k $(k=1,2,..)$, to szereg strony prawej [funkcya H, str 125] jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżnym szeregiem w obszarze D; wobec tego całkując człon za członem, otrzymujemy:

(43) $$W(xy\xi) - W(xy\xi') = (\xi-\xi')\sum_1^\infty \frac{A_k U_k(xy)}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}$$

gdzie położyliśmy

(44) $$A_k = \int_{(D)} F(x'y')\, U_k(x'y')\, d\tau \qquad (k=1,2,3,\dots)$$

przyczem całki te mają sens określony. Przejdźmy z parametrem ξ' do nieskończoności, zakładając, że jego argument θ', będąc różnym od liczb 0 i 2π, zatrzymuje stałą wartość; możemy przeto założyć, że parametr ξ' jest ~~na tyle~~ takim, iż spełnia nierówności 57 (str 131), przeto na mocy nierówności 75 (str 90) będzie:

$$|W(xy,\xi')|^2 < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta'}{2}} + 2\right)^2 \frac{\mathcal{L}}{\rho_1' \sin^2\frac{\theta'}{2}}$$

gdzie ρ_1' oznacza moduł parametru ξ'; ta nierówność zachodzi dla dowolnego punktu (xy) obszaru D. Wobec tego jest

$$\lim_{(\xi'=\infty)} W(xy,\xi') = 0$$

Aby szereg granic, łatwych po stronie prawej równości 43 do obliczenia, był granicą szeregu, wykażemy, że do każdej dodatniej liczby ν można znaleźć taką liczbę N, iż jest

$$\left|\sum_n^\infty \frac{A_k U_k(xy)(\xi-\xi')}{(\xi-\xi_k)(\xi'-\xi_k)}\right| < \nu$$

gdy jest $n \geq N$ i $|\xi'| > R'$ gdzie R' jest dość wielka dodatnia liczba.

W tym celu wykażemy, że szereg

(45) $$\sum_1^\infty \frac{A_k U_k(xy)}{\xi-\xi_k}$$

jest jednostajnie zbieżny w obszarze D.

Połóżmy $F(xy) = F_1(xy) + i F_2(xy)$; $A'_k = \int_{(D)} F_1(x'y') U_k(x'y') d\tau$

$$B'_k = \int_D F_2(x'y') U_k(x'y') d\tau$$

według pierwszego z twierdzeń Ścikłowa (str. 119) są szeregi liczbowe

$$\sum_1^\infty A'^2_k, \quad \sum_1^\infty B'^2_k$$

zbieżne, bo całki $\int_D F_1^2(x'y') d\tau$, $\int_D F_2^2(x'y') d\tau$ mają sens, w przeciwnym bowiem razie całka $\mathfrak{L}$ wskutek założenia nie miałaby sensu. Widoczne nadto, że jest

$$A_k = A'_k + i B'_k$$

Uważajmy szereg

$$R_{n,p} = \sum_n^{n+p} \left| \frac{A_k U_k(xy)}{\xi - \xi_k} \right| < \sum_{n}^{n+p} \frac{\sqrt{A'^2_k + B'^2_k}\, |U_k(xy)|}{|\xi - \xi_k|}$$

na mocy twierdzenia Schwarza będzie:

$$R^2_{n,p} \leq \sum_n^{n+p} (A'^2_k + B'^2_k) \sum_n^{n+p} \frac{U_k^2}{|\xi - \xi_k|^2}$$

Otóż, jak wiemy (str. 126) można dobrać taką liczbę dodatnią i całkowitą n, iż jest:

$$\sum_n^{n+p} \frac{U_k^2(xy)}{|\xi - \xi_k|^2} < \frac{\mathfrak{A}}{\xi_n}$$

o ile tylko jest parametr ξ nierówny żadnej z liczb ξ_k $(k = 1, 2, \dots)$; stała dodatnia $\mathfrak{A}$ nie zależy od liczby n. Istnieje więc stała $\mathfrak{D}$ dodatnia i taka, że jest

$$R_{n,p} < \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{\xi_n}}$$

jakąkolwiek dodatnią całkowitą jest liczba p, nadto $\mathfrak{D}$ od obu wskaźników n, p nie zależy. A że przy naszych założeniach co do liczby ξ' jest stosunek

$$\frac{\xi - \xi'}{\xi' - \xi_k}$$

co do modułu skończony, nadto, gdy jest liczba dostatecznie wielka, jest $\xi_n > E.n$ gdzie liczba dodatnia E zależy od krzywej więc strona prawa równości 43 ma zapowiedzianą własność; wobec tego z tej równości przez przejście do nieskończoności z parametrem ξ' otrzymujemy:

$$(46) \qquad \mathcal{W}(xy, \xi) = -\sum_1^\infty \frac{A_k U_k(xy)}{\xi - \xi_k}$$

przyczem, jak wykazaliśmy o szeregu 45 identycznym ze szeregiem strony prawej tej równości, jest on jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w całym obszarze D. Stąd znów jest:

$$\int_{D} W(x'y',\xi)\, U_k(x'y')\, d\tau = -\frac{A_k}{\xi - \xi_k}$$

wskutek tego jest:

$$W(xy,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(xy) \int_{D} W(x'y',\xi)\, U_k(x'y')\, d\tau$$

Rezultat ten niezmiernie ważny wypowiemy, zmieniając nieco oznaczenia, w formie następującej:

Jeżeli do danej funkcyi $W(xy)$, określonej w obszarze D, można znaleźć taką funkcyę $F(xy)$, by dla pewnej szczególnej wartości ξ zachodziło równanie całkowe:

(47) $$W(xy) = \int_{(D)} F(x'y')\, G(xy, x'y', \xi)\, d\tau$$

gdzie $G(xy, x'y', \xi)$ oznacza funkcyę uogólnioną Greena, przyczem całka

(48) $$\int_{(D)} [F(x'y')]^2\, d\tau$$

ma sens, to można funkcyę $W(xy)$ rozwinąć na następujący szereg funkcyi harmonicznych:

(49) $$W(xy) = \sum_{1}^{\infty} A_k \cdot U_k(xy)$$

gdzie jest

(50) $$A_k = \int_{(D)} W(x'y')\, U_k(x'y')\, d\tau \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots.)$$

Nadto szereg ten będzie jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w całym obszarze D.

§59. Wyprowadzimy stąd ważny wniosek: niech funkcya $W(xy)$, będąc ciągłą w całym obszarze D, ma pochodne $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ wewnątrz obszaru D ciągłe i nadto niech na krzywej C jest:

$$h'\left(\frac{dW}{dN}\right)_i = h(W)_i$$

Powiadamy, że równanie całkowe 47 ma rozwiązanie na funkcyę $F(xy)$ o podanym warunku. Uważajmy bowiem funkcyę Greena $G(xy, x'y', \xi)$ obszaru D o biegunie (xy), położonym wewnątrz obszaru D, który wyłączmy z obszaru D przez otoczenie go kółkiem Σ takiem, by leżało wewnątrz obszaru D; wzdłuż krzywej C będzie: $h'\left(\frac{dG}{dN}\right)_i = h(G)_i$. Stosując twierdzenie Greena tak do części rzeczywistej funkcyi, tu zachodzących, jak i do części urojonej i ściągając kółko Σ do punktu (xy), otrzymujemy w granicy, że jest:

$$W(xy) = -\int_{(D)} \left[W(x'y')\,\xi + \Delta W(x'y') \right] G(xy, x'y', \xi)\, d\tau$$

jak zauważyliśmy bowiem, istnieje funkcya $\Delta W(xy)$. Wskutek tego jest:

$$F(x'y') - \left[W(x'y') \cdot \xi + \Delta W(x'y')\right]$$

i jak widać, całka 48 (str 133) ma przy takiej funkcyi $F(x'y')$ określony sens. Można więc stosować twierdzenie §58 o rozwinięciu funkcyi $W(xy)$.

§60. Przyjmijmy, że funkcya $F(x'y')$ dana jest rzeczywistą w obszarze D. Okażmy, że dość, by całka:

$$(51) \qquad \mathcal{L} = \int_{(D)} F^2(x'y')\,d\tau$$

miała sens określony, aby zachodziła równość:

$$(52) \qquad \int_{(D)} F^2(x'y')\,d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$$

gdzie jest

$$(53) \qquad A_k = \int_{(D)} F(x'y')\,U_k(x'y')\,d\tau$$

Jeżeli przy pomocy danej funkcyi $F(xy)$ utworzymy funkcyę

$$(54) \qquad W(xy,\xi) = \int_{D} F(x'y')\,G(xy, x'y', \xi)\,d\tau$$

to ona da się rozwinąć na szereg funkcyi harmonicznych według równości 46 (str 132), przyczem szereg strony prawej jest szeregiem jednostajnie i absolutnie zbieżnym w obszarze D. Załóżmy, że parametr ξ jest liczbą rzeczywistą i ujemną, równą liczbie $(-\xi_0)$, gdzie liczba dodatnia ξ_0 jest ~~mniejsza~~ taką, iż liczba $(-\xi_0)$ jest mniejszą od każdej z liczb ξ_k $(k=1,2,\ldots)$.

Z równości 46 otrzymamy, że jest:

$$(55) \qquad W(xy, -\xi_0) = \sum_{1}^{\infty} \frac{A_k U_k(xy)}{\xi_0 + \xi_k}$$

wskutek tego jest $W(xy,-\xi_0)$ funkcyą rzeczywistą; a stąd jest:

$$(56) \qquad \int_{(D)} W^2(xy,-\xi_0)\,d\tau = \sum_{1}^{\infty} \frac{A_k^2}{(\xi_0+\xi_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^2}{(\xi_0+\xi_k)^2} + R_{n+1}$$

gdzie przez R_{n+1} oznaczamy resztę szeregu, a więc jest

$$R_{n+1} < \frac{1}{(\xi_0+\xi_{n+1})^2} \cdot \sum_{n+1}^{\infty} A_k^2$$

Na mocy pierwszego twierdzenia Stekłowa (str 119) jest szereg $\sum_{1}^{\infty} A_k^2$ szeregiem zbieżnym; więc do każdej dodatniej liczby ε można znaleźć taką liczbę N, iż jest

$$\sum_{n+1}^{\infty} A_k^2 < \varepsilon$$

gdy jest $n \geq N$. Stąd więc jest

$$R_{n+1} < \frac{\varepsilon}{(\xi_0+\xi_{n+1})^2}$$

Wskutek tego jest: $\lim\limits_{\xi_0=\infty} \left[\xi_0^2 \int_{D} W^2(x'y',-\xi_0)\,d\tau\right] = \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + \lim\limits_{\xi_0=\infty} (\xi_0^2 \cdot R_n)$

a, że jest: $\xi_0^2 R_{n+1} < \varepsilon$ dla $n \geq N$

więc jest:

$$(5\xi)\quad \lim_{\xi_0=\infty} \int_{(\mathfrak{D})} \xi_0^2 W^2(x'y', -\xi_0)\, dz = \sum_1^\infty A_k^2$$

Aby więc udowodnić nasze twierdzenie, musimy wykazać, że całka lewej strony dąży do granicy $\mathfrak{L}$ t. j. że całka

$$(5\eta)\quad \int_{(\mathfrak{D})} \left[\xi_0^2 W^2(x'y', -\xi_0) - F^2(x'y')\right] dz$$

dąży do zera wraz z liczbą $\frac{1}{\xi_0}$.

Wobec znanych własności całek wystarczyłoby wykazać:

1) że można różnicę $\left[\xi_0 W(xy, -\xi_0) - F(xy)\right]$ uczynić dowolnie małą w ~~obszarze~~ pewnym obszarze $\mathfrak{D}_0$, który jest częścią obszaru $\mathfrak{D}$, a dowolnie mało się różni od obszaru $\mathfrak{D}$ czyli dokładniej: jeśli tylko punkt xy należy do obszaru $\mathfrak{D}_0$, który się od obszaru $\mathfrak{D}$ różni o mniej niż dana, choćby dowolnie mała, dodatnia liczba ε, to istnieje liczba dodatnia X, niezależna ani od liczby ε ani od punktu (xy) taka, że dla liczb $\xi_0 \geq X$ jest

$$\left|\xi_0 W(xy, -\xi_0) - F(xy)\right| < \eta$$

gdzie równość $\lim \varepsilon = 0$ pociąga za sobą jednostajnie równość $\lim \eta = 0$.

2) Trzeba wykazać, że suma $\left[\xi_0 W(xy, -\xi_0) + F(xy)\right]$ ma górną granicę niezależną od położenia punktu (xy) w obszarze $\mathfrak{D}$ i dla liczb $\xi_0 \geq X$.

Naprzód uprościmy sobie rozumowanie, zakładając, że funkcya $F(xy)$ ma w obszarze $\mathfrak{D}$ górną granicę M. Ponieważ założyliśmy, że całka $\mathfrak{L}$ [równanie 57 str. 134] ma sens określony, przeto obszar, w którym oscylacya funkcyi $F(xy)$ przekracza choćby dowolnie małą dodatnią liczbę ε musi wraz z liczbą ε dążyć do zera; przy danej liczbie ε wyłączmy z obszaru $\mathfrak{D}$ ten obszar, w którym oscylacya funkcyi F przekracza liczbę ε, pozostanie obszar Δ i wyłączmy z niego te punkty, których odległość od punktów krzywej C ma za dolną granicę daną liczbę d dodatnią i dostatecznie małą (ale różną od zera); zbiór takich punktów obszaru Δ stanowić będzie obszar Δ'. Z tego obszaru Δ' daje się wydzielić skończony obszar $\mathfrak{D}_0$ o dalszych własnościach następujących: 1) różnica

między obszarem $\mathfrak{D}$ i $\mathfrak{D}_0$ ~~mniej~~ jest mniejsza od liczby dowolnej i dodatniej η, jeżeli tylko odpowiednio dobierzemy liczby ε i d; nadto liczba η ma granicę zero wraz z granicą równą zero dla liczb ε i d; 2) istnieje liczba stała i dodatnia δ, różna od zera, a mniejsza od liczby d tak, iż wewnątrz koła o promieniu δ, którego środkiem jest dowolny punkt obszaru $\mathfrak{D}_0$, jest oscylacya funkcyi $F(xy)$ mniejsza od liczby ε.

Jak wiemy, jest:

$$W(xy, -\xi_0) = \int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\, G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau \tag{59}$$

Według rozdziału o funkcyach Greena będzie:

$$G(xy, x'y', -\xi_0) = \frac{f(\varrho, \mu_0)}{2\pi} - u(x'y')$$

gdzie ϱ oznacza odległość punktów (xy) i $(x'y')$, zaś μ_0 jest liczbą, w którą przechodzi liczba μ z § 3 (str. 5), gdy za liczbę ξ podstawimy liczbę $(-\xi_0)$.

Wobec tego jest

$$W(xy, -\xi_0) = K - K'$$

gdzie położyliśmy:

$$K = \frac{1}{2\pi} \int_{(\mathfrak{D})} F(x'y') f(\varrho, \mu_0)\, d\tau \quad ; \quad K' = \int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\, u(x'y')\, d\tau$$

Uważajmy funkcyę $u(xy)$ czyniącą zadość warunkowi:

$$\Delta u + \xi u = 0$$

wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$, zaś na krzywej C równaniu takiemu, ażeby było

albo:
$$u_i = \frac{f(\varrho, \mu)}{2\pi}$$

albo:
$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \tau$$

gdzie ϱ oznacza odległość punktu bieżącego $x'y'$ krzywej C od stałego punktu (xy), wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$ leżącego, nadto jest

$$\tau = \left(\frac{d}{dN}\left(\frac{f(\varrho\,\mu)}{2\pi}\right)\right)_i - h\left(\frac{f(\varrho\,\mu)}{2\pi}\right)_i$$

zaś liczba μ ma znaczenie znane z paragrafu 3.

Załóżmy, że parametr $\xi = \rho_1(\cos\theta + i\sin\theta)$ spełnia nierówność 18 (str. 40), przeto dla przypadku pierwszego można znaleźć taki potencyał warstwy pojedynczej, iż wzdłuż krzywej C jest $\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d}{dN}\left(\frac{f(\varrho\mu)}{2\pi}\right)\right)_e$ i przeto jak wiemy (nierówność 21 str. 41), jest

$$|u| < \frac{4c}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}} \max\left\{\frac{1}{2\pi}\left|\left(\frac{d}{dN}\left(\frac{f(\varrho\mu)}{2\pi}\right)\right)_e\right|\right\}$$

w całym obszarze $\mathfrak{D}$, przyczem zakładamy, że punkt stały (xy) leży wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$; gdy więc założymy, że punkt (xy) ma dowolne położenie wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$, byle jego odległość od punktów krzywej C nie była mniejsza od liczby d, to na mocy nierówności 7 (str. 6) jest:

$$\left|\left(\frac{df(\varrho\mu)}{dN}\right)_e\right| < \frac{\pi}{2} m e^{-ad} + \frac{e^{-ad}}{d}$$

gdzie jest $m=\sqrt{\rho_1}$, $a=\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}$. Wskutek tego jest

(60) $$|u'| < \frac{2c}{\pi\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\rho_1}\,e^{-\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}d} + \frac{e^{-2\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}}{d}\right]$$

Ponieważ liczba $\sin\frac{\theta}{2}$ nie może być ani zerem ani liczbą ujemną, więc iloczyn $|\xi^p\cdot u'| = \rho_1^p|u'|$ dąży oczywiście do zera wraz z liczbą $\frac{1}{\rho_1}$ jednostajnie w całym obszarze D, ale tem powolniej, im mniejszy jest kąt θ; jeżeli się ograniczymy do wartości kąta θ spełniających nierówności $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}$ albo $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{7\pi}{4}$ etc to możemy zapewnić sobie jednostajnie osiąganie granicy względem parametru ξ o nałożonych warunkach.

W drugim wypadku, gdy parametr ξ spełnia warunki 18 (str 40) i 49 (str 46), to można założyć potencyał u' warstwy pojedynczej, któryby według której C spełniał równość:

$$\left(\frac{du'}{dN}\right)_i = h(u')_i + \tau$$

gdzie funkcyę τ określiliśmy na str 135. Na mocy nierówności 51 (str 46) będzie

$$|u'| < \frac{8c}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\max|\tau|$$

ale na mocy nierówności 6 i 7 (str 6) i założenia identycznego o położeniu punktu (xy) w obszarze D, co dla pierwszego przypadku, będzie:

$$\max|\tau| < \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{2}me^{-ad}+\frac{e^{-ad}}{d}\right\} + \frac{H}{\pi}\frac{1}{ad}e^{-\frac{ad}{2}}$$

gdzie jest:

$$m=\sqrt{\rho_1};\quad a=\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}$$

H zaś górną granicą modułu funkcyi h. Oczywiście dalsze rozumowanie pozostanie to samo jak powyżej.

Otóż widać, że wolno położyć $\xi=-\xi_0$, przyczem liczba ξ_0 musi być dość wielka i że dla tej wartości szczególnej parametru ξ funkcya u' przechodzi we funkcyę $u(xy)$; wskutek powiemy, że moduł $|\xi_0 u|$ dąży wraz z liczbą $\frac{1}{\xi_0}$ do zera jednostajnie w całym obszarze D_1, gdy punkt (xy) zostaje w obszarze D_0; do każdej więc dodatniej liczby δ', można znaleźć liczbę X dodatnią, iż, gdy w równościach 18 (str 40) i 49 (str 46) położę $\rho_1 = X$, $\theta=\pi$, spełnia nierówności i gdy jest $\xi_0 \ge X$, to jest w całym obszarze D

(61) $$|\xi_0 u| < \delta'$$

byle punkt (xy) pozostawał w obszarze D_0. Stąd jest:

(62) $$|\xi_0 K'| < M\delta' T \qquad (\xi_0\ge X)$$

gdzie T oznacza powierzchnię obszaru D. Oznaczmy:

$$\eta' = F(xy) - F(x'y')$$

skoro punkt (xy) leży w obszarze D_0, to istnieje koło o promieniu δ o środku (xy) takie, iż dla dowolnych punktów $(x'y')$ wewnątrz tego koła lub na nim jest

$$|\eta'| < \delta'$$

jeżeli tylko jest

$$\delta' \geqq \varepsilon$$

wnętrze tego koła oznaczmy przez D'', część pozostałą obszaru D przez D'''; mogę więc położyć:

$$K = J + J'$$

gdzie jest

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{(D'')} F(x'y') f(\varrho\mu)\, d\tau \; ; \; J' = \frac{1}{2\pi}\int_{D'''} F(x'y') f(\varrho\mu)\, d\tau$$

ale dla obszaru D'' mogę położyć:

$$F(x'y') = F(xy) - \eta'$$

gdzie jest $|\eta'| < \delta'$; przeto mogę napisać:

$$J = J_0 - J_0'$$

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} F(xy) \int_{D''} f(\varrho\mu)\, d\tau \; ; \; J_0' = \frac{1}{2\pi}\int_{(D'')} \eta' f(\varrho\mu)\, d\tau$$

Dla punktów obszaru D''' jest $\varrho \geqq \delta$ i nadto, jak zwykle, niech jest $\mu = a + bi$, to według nierówności 6 (str. 6) jest

$$|J'| < \frac{2e^{-\frac{a\delta}{2}}}{a\delta} . M . T$$

nadto jest

$$\int_{D''} f(\varrho\mu)\, d\tau = \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu\sqrt{\delta^2+t^2}} dt\right) . 2\pi$$

więc jest

$$J_0 = F(xy) . \left\{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu\sqrt{\delta^2+t^2}} dt\right\}$$

a że jest

$$\mu = \sqrt{\xi_0}$$

więc jest

$$\left|\xi_0 J_0 - F(xy)\right| = \left|\frac{F(xy)}{\mu}\int_0^\infty e^{-\mu\sqrt{\delta^2+t^2}} dt\right| \xi_0 < 2Me^{-\frac{\delta\sqrt{\xi_0}}{2}}$$

a więc można przez wybór liczby ξ_0 odpowiednio uczynić, by było:

$$\left|\xi_0 J_0 - F(xy)\right| < M . \delta'$$

Podobnie będzie

$$\left|\xi_0 J_0'\right| < \delta'\left\{1 + 2e^{-\frac{\delta\sqrt{\xi_0}}{2}}\right\} < 3\delta'$$

więc będzie

$$\left|\xi_0 J - F(xy)\right| < (M+3)\delta'$$

Nadto jest;

$$\left|\xi_0 J'\right| < \frac{2\sqrt{\xi_0}}{\delta} e^{-\frac{\sqrt{\xi_0}\cdot\delta}{2}} M\mathcal{T}$$

a przeto mogę obrać takie liczbę ξ_0 wielką, iż będzie

$$\left|\xi_0 J'\right| < M\delta'$$

Ostatecznie będzie

$$\left|\xi_0 W(xy, -\xi_0) - F(xy)\right| < M\delta'\mathcal{T} + (2M+3)\delta'$$

a że wolno przyjąć

$$\delta' = \varepsilon$$

więc, kładąc $\quad M\mathcal{T} + 2M + 3 = A$

otrzymujemy, że jest

(63) $$\left|\xi_0 W(xy, -\xi_0) - F(xy)\right| < A\varepsilon$$

a stąd jest

(64) $$\left|\xi_0 W(xy, -\xi_0) + F(xy)\right| < A\varepsilon + 2M$$

przeto jest

(65) $$\left|\xi_0^2 W^2(xy, -\xi_0) - F^2(xy)\right| < A\varepsilon . (A\varepsilon + 2M)$$

a że ta nierówność zachodzi dla dowolnego punktu obszaru $\mathfrak{D}_0$, więc będzie

(66) $$\left|\xi_0^2 \int_{\mathfrak{D}_0} W^2(x'y', -\xi_0)\, d\tau - \int_{\mathfrak{D}_0} F^2(x'y')\, d\tau\right| < A\varepsilon(A\varepsilon + 2M)\mathcal{T}$$

Na mocy nierówności 79 (str. 92) i 91 (str. 94), kładąc w nich $\Gamma_1 = \xi_0$, $O = \pi$, istnieje stała dodatnia B zależna jedynie od krzywej C i taka, iż jest w całym obszarze $\mathfrak{D}$

(67) $$\left|W(x'y', -\xi_0)\right| < \frac{BM}{\xi_0}$$

a stąd jest

(68) $$\xi_0^2 \int_{(\mathfrak{D})} W^2(x'y', -\xi_0)\, d\tau - \xi_0^2 \int_{\mathfrak{D}_0} W^2(x'y', -\xi_0)\, d\tau < B^2 M^2 \eta$$

przeto jest

$$\left|\xi_0^2 \int_{\mathfrak{D}} W^2(x'y', -\xi_0)\, d\tau - \int_{\mathfrak{D}} F^2(x'y')\, d\tau\right| \leq \xi_0^2 \int_{\mathfrak{D}} W^2(x'y', -\xi_0)\, d\tau - \xi_0^2 \int_{\mathfrak{D}_0} W^2(x'y', -\xi_0)\, d\tau + \left|\xi_0^2 \int_{\mathfrak{D}_0} W^2(x'y', -\xi_0)\, d\tau -\right.$$

$$\left. - \int_{\mathfrak{D}_0} F^2(x'y')\, d\tau\right| + \left|\int_{\mathfrak{D}_0} F^2(x'y')\, d\tau - \int_{\mathfrak{D}} F^2(x'y')\, d\tau\right| <$$

$$< B^2 M^2 \eta + A\varepsilon(A\varepsilon + 2M)\mathcal{T} + M^2 \eta$$

a że jest $\lim \eta = 0$, gdy jest $\lim \varepsilon = 0$, więc jest

$$\lim_{\xi_0 = \infty} \left(\xi_0^2 \int_{(\mathfrak{D})} W^2(x'y', -\xi_0)\, d\tau\right) = \int_{(\mathfrak{D})} F^2(x'y')\, d\tau$$

Wobec tego jest

(67) $$\int_{(\mathfrak{D})} F^2(x'y')\, d\tau = \sum_1^\infty A_k^2$$

§61. Równość 67ma udowodniliśmy w założeniu, że całka $\mathfrak{L}$ (rów. 51. str. 134)

ma sens określony i że funkcya rzeczywista $F(xy)$ jest ograniczona w całym obszarze D. Odrzućmy to drugie założenie – załóżmy, że funkcya rzeczywista $F(xy)$ jest taką, iż całka $\mathfrak{L}$ ma określone znaczenie. Rozdzielmy obszar D na dwie części Δ' i Δ'' takie, iż funkcya $F(xy)$ w obszarze Δ' jest ograniczona, a przez część Δ'' rozumiemy rozumiemy część pozostałą z obszaru D. Uważajmy dwie funkcye $F'(xy)$ i $F''(xy)$ określone w następujący sposób: niech jest:

$$F'(xy) = F(xy) \quad \text{w obszarze } \Delta'$$

zaś

$$F'(xy) = 0 \quad \text{w obszarze } \Delta''$$

i niech jest odwrotnie

$$F''_{(xy)} = 0 \quad \text{w obszarze } \Delta'$$

a

$$F''_{(xy)} = F(xy) \quad \text{w obszarze } \Delta''$$

w obec tego funkcye $F'(xy)$, $F''(xy)$ będą rzeczywiste. Oznaczmy:

$$\mathfrak{L}' = \int_{(D)} F'^2(x'y')\,d\tau \; ; \; \mathfrak{L}'' = \int_{(D)} F''^2_{(x'y')}\,d\tau \; ; \; A'_k = \int_{(D)} F'(x'y')\,U_k(x'y')\,d\tau$$

$$A''_k = \int_{(D)} F''(x'y')\,U_k(x'y')\,d\tau$$

tedy jest

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' + \mathfrak{L}'' \; ; \; A_k = A'_k + A''_k$$

i jak widać, wszystkie tu rozważane całki mają sens.

Ponieważ funkcya $F'(xy)$ jest ograniczona w obszarze D, więc można do niej stosować rozumowanie poprzedzającego paragrafu t. j. będzie:

$$(68) \qquad \mathfrak{L}' = \sum_1^\infty A'^2_k$$

ponieważ wiemy tylko ~~tylko~~ tyle, że całka $\mathfrak{L}''$ istnieje, więc na mocy pierwszego t. zw. twierdzeń Sikorsa (str. 119) będzie

$$(69) \qquad \sum_{k=1}^\infty A''^2_k \leq \mathfrak{L}''$$

Zbadamy różnicę

$$\sum_1^\infty A^2_k - \mathfrak{L}'$$

wyraz pierwszy tej różnicy jest szeregiem zbieżnym, bo całka $\mathfrak{L}$ ma sens określony; nadto jest

$$A^2_k = A'^2_k + 2A'_k A''_k + A''^2_k$$

więc na mocy równości 68 jest

$$(70) \qquad \sum_1^\infty A^2_k - \mathfrak{L}' = \sum_1^\infty \left(2A'_k A''_k + A''^2_k\right)$$

z tego wynika, że szereg:

$$\sum_1^\infty A'_k A''_k$$ jest zbieżny i na mocy nierówności Schwarza i nierówności 69 jest:

$$\left(\sum_1^\infty A_k' A_k''\right)^2 \leq \left(\sum_1^\infty A_k'^2\right)\left(\sum_1^\infty A_k''^2\right) \leq \mathcal{L}'\mathcal{L}'' \leq \mathcal{L}\mathcal{L}''$$

jest bowiem

$$\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$$

wobec tego jest:

$$\left|\sum_1^\infty A_k^2 - \mathcal{L}'\right| \leq 2\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{L}''} + \mathcal{L}''$$

Ponieważ całka $\mathcal{L}$ ma sens, więc na mocy własności całek będzie można tak zwiększać obszar D' i zmniejszać zarazem obszar D'', iżby w obszarze D' moduł funkcyi $F(xy)$ był ograniczony i równocześnie będzie można doprowadzić do tego, iż całka $\mathcal{L}''$ będzie dowolnie małą; innemi słowy i ponieważ w nierówności następującej

$$\left|\sum_{k=1}^\infty A_k^2 - \mathcal{L}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^\infty A_k^2 - \mathcal{L}'\right| + \mathcal{L}'' \leq 2\left(\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{L}''} + \mathcal{L}''\right)$$

można sumę $\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{L}''} + \mathcal{L}''$ uczynić dowolnie małą przez powyżej skreślone zmniejszanie obszaru D'', kiedy strona lewa:

$$\left|\sum_{k=1}^\infty A_k^2 - \mathcal{L}\right|$$

od tego procesu nie zależy, więc nie może być inaczej, jak

$$\mathcal{L} \equiv \int_{(D)} F^2(xy)\, d\tau = \sum_{k=1}^\infty A_k^2$$

c. b. d. u.

VII. Uproszczone zagadnienie Fouriera.

§62. W niniejszym rozdziale podamy rozwiązanie uproszczonego zagadnienia Fouriera, poprzód zmieniając nieco warunki warunki tego zagadnienia rozwiążemy następujące zagadnienie analogiczne:

Niech $F(xy)$ oznacza funkcyę rzeczywistą punktu obszaru D taką, iż całka $\mathcal{L} = \int F^2(xy)\,d\tau$ ma sens określony. Niech

1) $V(xyt)$ będzie funkcyą określoną dla każdej dodatniej wartości zmiennej (t) i dla każdego punktu (xy) w całym obszarze D i niech ona jak i jej pochodna częściowa: $\frac{\partial V}{\partial t}$ będą dla każdej wartości dodatniej zmiennej t i dla każdego położenia punktu (xy) obszaru D funkcyami ciągłemi trzech zmiennych (xyt).

2) Dla każdej dodatniej wartości zmiennej (t) i dla każdego punktu (xy) wewnątrz obszaru D leżącego istnieją po-

chodne $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ ciągłe względem zmiennych (xyt), przyczem jest

(1) $$\frac{\partial V}{\partial t} = \Delta V$$

3) Nadto dla każdej dodatniej wartości zmiennej (t) istnieje jednostajnie osiągana wzdłuż krzywej C granica $\left(\frac{dV}{dN}\right)_i$ i jest

(2) $$h'\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = h(V)_i$$

gdzie jest $h' = 0$ albo $h' = 1$, zaś h oznacza funkcyę ciągłą i rzeczywistą, określoną wzdłuż krzywej C.

4) Całka:

(3) $$\int_{(\Sigma)} [F(x'y') - V(x'y', t)]^2 d\tau$$

dąży do zera, gdy zmienna t dąży do zera przez wartości dodatnie.

Udowodnimy, że dla tego zagadnienia analogicznego istnieje i tylko jedno rozwiązanie.

Wskutek warunku 2^{go} tego zagadnienia analogicznego i wywodu z § 59 (str. 133) wobec równania 2 (str. 142) będzie można funkcyę $V(xyt)$, o ile istnieje, rozwinąć na szereg funkcyj harmonicznych w sposób następujący:

(4) $$V(xy, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\, U_k(xy)$$

gdzie jest

(5) $$\varphi_k(t) = \int_{(\Sigma)} V(x'y', t)\, U_k(x'y') d\tau$$

na mocy warunku 1° (str. 141) będzie funkcya $\varphi_k(t)$ posiadała pochodną dla każdej dodatniej wartości zmiennej t i będzie:

(6) $$\frac{d\varphi_k}{dt} = \int_{(\Sigma)} \frac{\partial V(x'y't)}{\partial t} \cdot U_k(x'y') d\tau$$

co na mocy równości 1 można napisać w formie:

(7) $$\frac{d\varphi_k}{dt} = \int_{(\Sigma)} \Delta V(x'y't) \cdot U_k(x'y') d\tau$$

Wskutek warunków powyżej na funkcyę $V(xyt)$ nałożonych, wolno do funkcyi V i U_k stosować twierdzenie Greena:

$$\int_{(C)} \left(U_k \frac{dV}{dN} - V \frac{dU_k}{dN}\right)_i ds + \int_{(\Sigma)} (U_k \Delta V - V \Delta U_k) d\tau = 0$$

co się redukuje do równania:

$$\int_{(\Sigma)} U_k(x'y') \Delta V(x'y't) d\tau = \int_{(\Sigma)} V(x'y't) \Delta U_k(x'y') d\tau$$

Równość (7) przybiera więc kształt:

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \int_{(\Sigma)} V(x'y't) \Delta U_k(x'y') d\tau = -\xi_k \int_{(\Sigma)} V(x'y't) U_k(x'y') d\tau = -\xi_k \varphi_k$$

czyli będzie

$$(8)\qquad \frac{d\varphi_k}{dt} + \xi_k \varphi_k = 0$$

dla każdej dodatniej wartości wartości zmiennej (t). Stąd będzie

$$(9)\qquad \varphi_k = A_k . e^{-\xi_k t}$$

gdzie jest $\quad A_k = \lim_{t=0} \{\varphi_k(t)\}$

gdyż granica ta istnieć musi, jeżeli istnieje funkcya żądana $V(xyt)$. Chcąc wyznaczyć liczbę A_k z danych warunków połóżmy:

$$\varphi_k(t) = \int_{(\mathfrak{D})} V(x'y't)\, U_k(x'y')\,d\tau = \int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')U_k(x'y')\,d\tau + \int_{(\mathfrak{D})} [V(x'y't) - F(x'y')]\,U_k(x'y')\,d\tau$$

a stąd na mocy nierówności Schwarza będzie:

$$\left[\varphi_k(t) - \int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\,U_k(x'y')\,d\tau\right]^2 \leq \int_{(\mathfrak{D})} [V(x'y't) - F(x'y')]^2 d\tau \int_{(\mathfrak{D})} U_k^2(x'y')\,d\tau =$$

$$= \int_{(\mathfrak{D})} [V(x'y't) - F(x'y')]^2 d\tau$$

Na mocy czwartego warunku (str 142) obecnego zagadnienia otrzymujemy

$$(10)\qquad A_k = \lim_{t=0} \{\varphi_k(t)\} = \int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\,U_k(x'y')\,d\tau$$

A więc zagadnienie analogiczne może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie następujące

$$(11)\qquad V(xyt) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k . U_k(xy) . e^{-\xi_k t}$$

przyczem liczby A_k określa wzór 10.

Chodzi teraz o to, by wykazać, że funkcya $V(xyt)$, określona wzorem 10, jest rzeczywiście rozwiązaniem obecnego zagadnienia.

Wykażemy że funkcya ta czyni zadość poprzej określonym warunkom zagadnienia.

Ażeby udowodnić, że szereg 10 przedstawia funkcyę ciągłą, to z powodu ciągłości każdego członu dość wykazać, że jest szeregiem jednostajnie zbieżnym względem zmiennych (x, y, t).

Otóż na mocy twierdzenia Schwarza jest:

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} A_k U_k(xy) e^{-\xi_k t}\right)^2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} A_k^2 \sum_{n}^{\infty} U_k^2(xy) . e^{-2\xi_k t}$$

pierwszy czynnik strony prawej jest liczebny i skończony na mocy pierwszego z t. zw. twierdzeń Ścisłowa (str 119). Wiemy, że istnieje liczba skończona N taka, że każda z liczb ξ_k, gdy jest $k \geq N$, jest dodatnia; przeto przy każdej dodatniej wartości zmien-

nej (t) jest $e^{-2\xi_k t} < \frac{1}{2\xi_k^2 t^2}$ $(k \geq N)$

nadto jest (str. 126) $\sum_n^\infty \frac{U_k^2(xy)}{\xi_k^2} < \frac{(4c+2)^2}{\xi_n}$

o ile liczba n nie jest mniejsza od liczby N. Gdy więc jest $n \geq N$, to jest

$$\sum_n^\infty U_k^2(xy) e^{-2\xi t} < \frac{1}{2t^2} \sum_n^\infty \frac{U_k^2}{\xi_k^2} < \frac{(4c+2)^2}{2\xi_n t^2}$$

stąd (jednostajna zbieżność względem zmiennych xy w całym obszarze D i względem zmiennej t, o ile jest

$$T_1 \geq t \geq T > 0$$

gdzie liczby T_1 T dowolne, byle dodatnie; stąd też ciągłość funkcyi V(xyt) względem zmiennych (xyt) przy dodatniej wartości zmiennej t, i w obszarze D.

Nadto uważajmy szereg:

$$(12) \qquad (-1)^p \sum_1^\infty A_k \xi_k^p U_k(xy) e^{-\xi_k t}$$

gdzie jest p liczbą dodatnią i całkowitą.

Ponieważ jest przy dodatniej wartości zmiennej (t):

$$e^{-2\xi_k t} < \frac{(p+2)!}{2^{p+2} \xi_k^{p+2} t^{p+2}}$$

więc rozumując, jak poprzednio, wykażemy, że szereg 12 jest w całym obszarze D i przy wartości $t \geq T > 0$ jednostajnie zbieżny względem zmiennych (x, y, t), przeto (str 35 i nast.) przedstawia dla tych wartości zmiennych (x, y, t) pochodną $\frac{\partial^p V}{\partial t^p}$. Ponieważ liczba T jest dowolna, byle dodatnia, więc widzimy, że funkcya V, określona szeregiem 11 (str 143) jak i jej pochodne dowolnego rzędu względem zmiennej t są ciągłe w całym obszarze D (nawet na krzywej C) przy dodatniej wartości zmiennej t.

Ażeby wykazać, że funkcya V(xyt) czyni zadość równaniu 1 (str 142), nie możemy wprost różniczkować szeregu 11 co do zmiennej (x) lub (y), bo nie mając żadnych nierówności na pochodne funkcyi harmonicznych, nie moglibyśmy udowodnić zbieżności odpowiednich szeregów. Musimy przeto użyć, za przykładem p. Zaremby, następującego fortelu.

Oznaczmy przez ξ_0 liczbę dodatnią, dość wielką, by liczba $(-\xi_0)$ była mniejsza od każdej z liczb ξ_k $(k=1,2,\dots)$; istnieje więc funkcya Greena $G(xy, x'y', -\xi_0)$. Powyżej udowodniliśmy, że jest:

(13) $\frac{\partial V}{\partial t} = -\sum_1^\infty A_k \xi_k U_k e^{-\xi_k t}$; $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \sum_1^\infty A_k \xi_k^2 U_k \cdot e^{-\xi_k t}$

a stąd jest

(14) $$\xi_0 \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\sum_{k=1}^\infty A_k \xi_k (\xi_k + \xi_0) U_k e^{-\xi_k t}$$

pomnóżmy tę równość obustronnie przez funkcyę $G(xy, x'y', -\xi_0)$ i całkujmy człon za członem (co tu wolno, jak wiemy); korzystając z równości 20 (str 124) otrzymujemy, że jest:

(15) $$\int_{(D)} \left\{ \xi_0 \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right\} G(xy, x'y', -\xi_0) d\tau = -\sum_{k=1}^\infty A_k \xi_k U_k e^{-\xi_k t} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Podobnie będzie

(16) $$\int_{(D)} \left[\xi_0 V(x'y't) - \frac{\partial V(x'y't)}{\partial t} \right] G(xy, x'y', -\xi_0) d\tau = \sum_1^\infty A_k U_k(xy) e^{-\xi_k t} = V(x,y,t)$$

Obydwie więc funkcye $V(xyt)$, $\frac{\partial V}{\partial t}$ mają kształt funkcyi W (str 91 i nast.) rozważanej w rozdziale czwartym. Ponieważ jest

$$G(xy, x'y', -\xi_0) = \frac{f(\rho, \mu_0)}{2\pi} - u(x'y')$$

gdzie ρ oznacza długość odcinka łączącego punkty (xy) i $(x'y')$, μ_0 znaną liczbą zależną od parametru $(-\xi_0)$, zaś $u(x'y')$ funkcyę która zajmowaliśmy się w rozdziale czwartym, więc tak funkcya V jak i $\frac{\partial V}{\partial t}$ są różnicami dwóch całek, z których jedna jest znaną z § 27, 28 (str 50 i nast.), a druga całka, gdy parametr $(-\xi_0)$ spełnia nierówności 18 (str 40) i 49 (str 46), ma funkcyę podcałkową ciągłą i ograniczoną, o ile punkt (xy) leży wewnątrz obszaru D. Ponieważ, jak wiemy, funkcye V, $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ są ciągłe i ograniczone w całym obszarze D przy dodatniej wartości zmiennej (t), przeto, jak łatwo widzieć, funkcye V i $\frac{\partial V}{\partial t}$ na mocy równości 15 i 16 mają przy dodatniej wartości zmiennej t pochodne pierwsze względem zmiennych (x) i (y), ale wtedy znów całka V (równ. 16) ma drugie pochodne ciągłe wewnątrz obszaru D i będzie wewnątrz obszaru D:

$$\Delta V - \xi_0 V + \left(\xi_0 V - \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0$$

czyli

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}$$

co mieliśmy wykazać.

Chodzi nam teraz o trzeci warunek zagadnienia (str 142).

Otóż z równości 20 (str 124) otrzymujemy

(17) $$U_k(xy) = (\xi_0 + \xi_k) \int_D U_k(x'y') G(xy, x'y', -\xi_0) d\tau$$

a więc funkcya harmoniczna posiada postać funkcyi znanej

pod nazwą W; przeto na mocy nierówności ze str. 92 i 94 mamy:

$$\left|\mathfrak{D}_{n_i}(U_k)\right| < \frac{2\pi(16c+5)}{\sqrt{\xi_0}} \cdot \operatorname{Max}|U_k|$$

(18)

$$\left|\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i\right| < \frac{16\pi}{\sqrt{\xi_0}} \operatorname{Max}|U_k|$$

dość więc znaleźć górną granicę funkcyi $|U_k|$. Na mocy równości 17 (str. 45) i nierówności 75 (str. 90) jest

$$|U_k(xy)| < (4c+2)\,\frac{\sqrt{\int\limits_{(\mathfrak{D})}(\xi_0+\xi_k)^2 U_k^2(x'y')\,d\tau}}{\sqrt{\xi_0}}$$

czyli jest

(19) $$|U_k(xy)| < (4c+2)\cdot\frac{\xi_0+\xi_k}{\sqrt{\xi_0}},$$

przeto ze wzorów 18 otrzymujemy, iż jest:

(20) $$\begin{cases} \left|\mathfrak{D}_{n_i}(U_k)\right| < 2\pi(16c+5)(4c+2)\cdot\dfrac{\xi_0+\xi_k}{\xi_0} \\ \left|\left(\dfrac{dU_k}{dN}\right)_i\right| < \dfrac{16\pi(4c+2)(\xi_0+\xi_k)}{\xi_0} \end{cases}$$

Wyciągamy stąd następujące wnioski:

a) Szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \mathfrak{D}_{n_i}(U_k)\cdot e^{-\xi_k t}$ będzie przy dodatniej wartości na zmienną (t) jednostajnie i bezwzględnie zbieżny, jest bowiem, gdy liczba k nie jest mniejszą od pewnej skończonej liczby:

$$e^{-\xi_k t} < \frac{3!}{\xi_k^3 t^3}$$

a że jest dla tych liczb k

$$\xi_k > Ek$$

i nadto szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

jest szeregiem zbieżnym, więc nasz wniosek jest usprawiedliwiony.

b) Wskutek tego istnieje ~~przy~~ przy dodatniej wartości na zmienną t pochodna $\mathfrak{D}_{n_i}(V)$ i jest

$$\mathfrak{D}_{n_i}(V) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mathfrak{D}_{n_i}(U_k)\, e^{-\xi_k t}$$

wtedy znów (str. 34 i nast.) istnieje granica $\left(\frac{dV}{dN}\right)_i$ i jest

$$\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i e^{-\xi_k t}$$

przyczem na mocy drugiej z nierówności 20 można łatwo wykazać, że szereg strony prawej ostatniej równości jest

jest szeregiem bezwzględnie i jednostajnie zbieżnym wzdłuż krzywej C przy dodatniej wartości na zmienną t.

c) Z jednostajnej zbieżności ostatniego szeregu i szeregu omawianego we wniosku a) i z faktu, że z założenia pochodne $\mathfrak{D}_{ni}(U_k)$ osiągają swe granice $\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i$ jednostajnie wzdłuż krzywej C wynika, że pochodna $\mathfrak{D}_{ni}(V)$ osiąga swą granicę $\left(\frac{dV}{dN}\right)_i$ jednostajnie wzdłuż krzywej przy dodatniej wartości na zmienną t. Jeżeli bowiem utworzymy różnicę:

$$\left(\frac{dV}{dN}\right)_i - \mathfrak{D}_{ni}(V) = \sum_1^n A_k\left[\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i - \mathfrak{D}_{ni}(U_k)\right]\cdot e^{-\xi_k t} + \sum_{n+1}^\infty A_k\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i e^{-\xi_k t} - \sum_{n+1}^\infty A_k \mathfrak{D}_{ni}(U_k) e^{-\xi_k t}$$

to znanym sposobem rozumowania wykażemy nasze twierdzenie.

Nadto jest

$$h'\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = h'\sum_1^\infty A_k\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i e^{-\xi_k t} = \sum_1^\infty A_k\, h(U_k)_i e^{-\xi_k t} = h\cdot(V)_i$$

Ażeby wykazać, że funkcya $V(xyt)$, określona wzorami 10 i 11 (str. 143) spełnia warunek 4 zagadnienia (str. 142), utwórzmy równość

$$\int_{(\mathfrak{D})}[F(xy) - V(xyt)]^2 d\tau = \int_{(\mathfrak{D})} F^2 d\tau - 2\int_{\mathfrak{D}} FV d\tau + \int_{(\mathfrak{D})} V^2 d\tau$$

ale jest:

$$\int_{(\mathfrak{D})} F^2 d\tau = \sum_1^\infty A_k^2\ ,\quad \int_{(\mathfrak{D})} FV d\tau = \sum_1^\infty A_k^2 e^{-\xi_k t}\ ;\quad \int_{(\mathfrak{D})} V^2 d\tau = \sum_1^\infty A_k^2 e^{-2\xi_k t}$$

wobec tego jest

$$\int_{(\mathfrak{D})}[F(xy) - V(xy,t)]^2 d\tau = \sum_1^\infty A_k^2(1-e^{-\xi_k t})^2 = \sum_1^n A_k^2(1-e^{-\xi_k t})^2 + \sum_{n+1}^\infty A_k^2(1-e^{-\xi_k t})^2$$

Możemy założyć, że liczbę n tak obraliśmy, że przy liczby ξ_k dla $k>n$ są dodatnie, przeto jest

$$0 < 1-e^{-\xi_k t} < 1$$

przy dodatniej wartości na zmienną t, nadto liczba n jest zarazem taka, iż przy danej dodatniej liczbie ε jest reszta:

$$\sum_{n+1}^\infty A_k^2$$

zbieżnego szeregu:

$$\sum_1^\infty A_k^2$$

mniejsza od liczby $\frac{\varepsilon}{2}$. Sumę $\sum_1^n A_k^2(1-e^{-\xi_k t})^2$, jako złożoną ze skończonej ilości wyrazów można uczynić mniejszą od liczby $\frac{\varepsilon}{2}$, jeżeli tylko zmienną t uczynimy dostatecznie małą. Innemi słowy: całka

$$\int_{(\mathfrak{D})}[F(xy) - V(xyt)]^2 d\tau$$

ma granicę równą zeru, gdy zmienna t przez wartości dodatnie dąży do zera.

§63. Wykażemy teraz, że rozwiązanie zagadnienia analogicznego, rozwiązą-

nego w poprzednim paragrafie będzie można uważać za rozwiązanie uproszczonego zagadnienia Fouriera, jeżeli nałożymy na funkcyę $F(xy)$ warunek ciągłości wewnątrz obszaru D. Poprzednio przekształciliśmy rozwiązanie zagadnienia analogicznego. Jeżeli uwianowicie znów przez $W(xy,\xi)$ uważać będziemy funkcyę:

(21) $$W(xy,\xi) = \int\limits_{(D)} F(x'y')\, G(xy;x'y';\xi)\, d\tau$$

to można funkcyę tę rozwinąć na szereg następujący:

(22) $$W(xy,\xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k U_k(xy)}{\xi - \xi_k}$$

gdzie jest tak dla funkcyi $W(xy,\xi)$, jak dla funkcyi $V(xyt)$, określonego szeregiem 11 (str 143)

(23) $$A_k = \int\limits_{(D)} F(x'y')\, U_k(x'y')\, d\tau$$

Na mocy twierdzeń o residuach nasuwa się myśl, że funkcyę $V(xyt)$ będzie można uważać za granicę pewnej całki konturowej na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ, byle kontur, na który całkujemy, w ten sposób rósł nieograniczenie, iżby przyjmował kolejno położenia tak dobranych konturów $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m, \ldots$, iż do każdej liczby ξ_k można znaleść liczbę całkowitą i dodatnią n taką, że wewnątrz kontura C_m o wskaźniku $m \geq n$ leży liczba ξ_k; nadto obraz geometryczny żadnej z liczb ξ_k nie ma leżeć na żadnym z konturów C_m.

Otóż kontury C_m na płaszczyźnie zmiennej zespolonej $\xi = \alpha + i\beta$ można tak określić a mianowicie: niech liczba rzeczywista i dodatnia ξ_0 jest taką, iż liczba $\xi = -\xi_0$ spełnia nierówności 18 (str 40) i 49 (str 46); wobec tego jest $-\xi_0 < \xi_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$; niech liczby

(24) $$k_1, k_2, k_3, \ldots$$

są liczbami całkowitemi, dodatniemi i rosnącemi, ale takiemi że jest już

(25) $$\xi_{k_1+1} + \xi_{k_1} \geq 2\xi_0$$

resztę na razie liczb 24 nie określimy dokładniej; nadto uważajmy liczby l_m i R_m dodatnie i takie, że jest:

(26) $$l_m = \frac{1}{2}\left(\xi_{k_m} + \xi_{k_m+1}\right)$$

(27) $$\xi_0 \leq R_m < l_m$$

Z początku współrzędnych Ω na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ kreślimy półkole o promieniu R_m, przecinające oś urojonych β w pun-

ktach A (po stronie dodatniej) i A' (po stronie ujemnej) i ujemną oś rzeczywistych α w punkcie A''; niech B będzie dowolnym punktem na dodatniej osi β położonym, ale takim, że jest $\Omega B > \Omega A$.
Uważajmy proste BB_1, B_1B_1', $B_1'B'$, łączące odpowiednio punkty B, B_1', B', określone przez współrzędne:

$$(l_m, \overline{\Omega B})\ ;\ (l_m, \overline{B\Omega_z})\ ;\ (0, \overline{B\Omega})$$

Konturem C_m nazwiemy kontur $AA''A'B'B_1'B_1BA$.
Utwórzmy teraz całkę:

$$(28)\qquad J_m = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_m)} W(xy,\xi)\, e^{-t\xi} d\xi$$

przyczem kontur C_m obiegamy w kierunku dodatnim. Wmyśl twierdzenia o własnościach całki J_m będzie

$$(29)\qquad J_m = \sum_{k=1}^{k_m} A_k U_k e^{-\xi_k t}$$

a że granica sumy J_m dla $m=\infty$ istnieje czyli jest szeregiem zbieżnym i równym funkcyi $V(xyt)$, więc jest

$$(30)\qquad V(xyt) = \lim_{m=\infty}\left[\frac{-1}{2\pi i}\int_{C_m} W(xy,\xi)\, e^{-t\xi} d\xi\right]$$

Zbadajmy tę część całki konturowej, która odnosi się do linii łamanej $B'B_1'B_1B$. Wiadomo, że jest

$$(31)\qquad \left|W(xy,\xi)\right| < \sqrt{\mathfrak{L}\cdot \dot{I}(xy)}$$

gdzie jest

$$(32)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{L} = \int_{(\Sigma)} F^2(x'y')\,d\tau \\ \dot{I}(xy) = \int_{(\Sigma)} \left|G(xy, x'y', \xi)\right|^2 d\tau \end{array}\right.$$

Wykazaliśmy na str. 90, że, jeżeli parametr $\xi = \rho_1(\cos\theta + i\sin\theta)$ spełnia nierówności 18 (str. 40) i 49 (str. 46), to jest

$$\left|\dot{I}(xy)\right| < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 2\right)^2 \frac{1}{\rho_1 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

i, przeto jest

$$(31bis)\qquad \left|W(xy,\xi)\right| < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta}{2}} + 2\right)\frac{\sqrt{\mathfrak{L}}}{\sqrt{\rho_1}\sin\frac{\theta}{2}}$$

jeżeli zaś parametr ξ temi nierównościami, o których była wyżej mowa, skrępowany nie jest to jest

$$(31ter)\qquad \left|W(xy,\xi)\right| < \left(\frac{4c}{\sin\frac{\theta'}{2}} + 2\right)\frac{\sqrt{\mathfrak{L}}}{\sqrt{\rho_1'}\sin\frac{\theta'}{2}}\cdot\frac{l'}{l}$$

jakiekolwiek ma położenie punkt (xy) wewnątrz obszaru Σ; jeżeli punkt X jest obrazem geometrycznym liczby ξ, punkt M_k obrazem najbliżej położonego z obrazów liczb ξ_k punktowi X, zaś punkt X' jest obrazem pomocniczej liczby

$\xi' = \rho_1'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ tak dobranej, że prosta XX' jest równoległa do osi urojonych β, liczba ξ' spełnia nierówności 18 (str. 40) i 49 (str. 46) i jest nadto $\sin\theta \cdot \sin\theta' \geqq 0$

Zbadajmy granicę całek

$$\lim_{m=\infty} \int_{B_1B} W(xy,\xi) e^{-t_\xi} d\xi \quad ; \quad \lim_{m=\infty} \int_{B'B_1'} W(xy,\xi) e^{-t_\xi} d\xi$$

ponieważ można pojąć, że zachodzi to wzdłuż dróg B_1B, $B'B_1'$ nierówności 30 bis, więc dość zająć się jedną całką np. całką:

$$\int_{B_1B} W(xy,\xi) e^{-t_\xi} d\xi$$

Jeżeli położymy:

$$\xi = \rho_1(\cos\theta + i\sin\theta) = \alpha + i\beta$$

to stąd wynika, że jest:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\beta}{2\rho_1\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$|e^{-t_\xi}| = e^{-t\alpha}$$

więc z nierówności 30 bis wynika:

$$\left|W(xy,\xi)\right| < \left(\frac{8c\rho_1\cos\frac{\theta}{2}}{\beta} + 2\right) \frac{2\sqrt{L}\sqrt{\rho_1}\cos\frac{\theta}{2}}{\beta} < \left(\frac{8c\rho_1}{\beta} + 2\right)\frac{2\sqrt{L}\rho_1}{\beta}$$

więc jest

$$\left|\int_{B_1B} W(xy,\xi) e^{-t_\xi} d\xi\right| < \int_0^{l_m} \left(\frac{16c\rho_1}{\beta} + 4\right)\frac{\sqrt{L}\rho_1}{\beta} e^{-t\alpha} d\alpha$$

strona prawa tej nierówności jest więc sumą:

$$(32) \qquad \frac{16c\sqrt{L}}{\beta^2}\int_0^{l_m} \rho_1\sqrt{\rho_1}\, e^{-t\alpha} d\alpha + \frac{4\sqrt{L}}{\beta}\int_0^{l_m} \sqrt{\rho_1}\, e^{-t\alpha} d\alpha$$

wprost są widoczne następujące równości i nierówności:

$$\rho_1\sqrt{\rho_1} = \sqrt[4]{(\alpha^2+\beta^2)^3} \quad ; \quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} < \alpha + \beta$$

$$\rho\sqrt{\rho_1} = \sqrt[4]{(\alpha^2+\beta^2)^3} < (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^3 = \alpha\sqrt{\alpha} + 3\alpha\sqrt{\beta} + 3\beta\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}$$

jest bowiem w naszym wypadku $\beta > 0$. Ponieważ całki

$$\int_0^\infty \alpha\sqrt{\alpha}\, e^{-t\alpha} d\alpha \; ; \; \int_0^\infty \alpha\, e^{-t\alpha} d\alpha \; ; \; \int_0^\infty \sqrt{\alpha}\, e^{-t\alpha} d\alpha \; , \; \int_0^\infty e^{-t\alpha} d\alpha$$

mają określony sens, gdy liczba t jest dodatnią, więc oznaczając przez $\mathfrak{A}$ największą z nich, otrzymamy następującą górną granicę pierwszego wyrazu sumy 32:

$$(33) \qquad 16c\sqrt{L}\cdot\mathfrak{A}\cdot\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{3}{\beta^{3/2}} + \frac{3}{\beta} + \frac{1}{\beta^{1/2}}\right)$$

a ponieważ jest

$$\sqrt{\rho_1} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

przeto otrzymamy na drugi wyraz sumy 32 (str. 150) górną granicę:

$$(33 \text{ bis}) \qquad 4\sqrt{2}\, \mathfrak{A}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^{1/2}}\right)$$

Z wyrażeń 33 i 33 bis jest widoczne, że całka $\int\limits_{B,B} W(xy,\xi)e^{-t\xi}d\xi$, a więc i całka $\int\limits_{B'B'_1} W(xy\xi)e^{-t\xi}d\xi$ dąży do zera, gdy liczba m rośnie nieograniczenie t.j. gdy liczba β rośnie nieograniczenie.

Aby zbadać granicę całki:

$$\int\limits_{B_1B_1'} W(xy,\xi)e^{-t\xi}d\xi$$

to wystarcza zbadać granicę całki

$$\int\limits_{B''B_1'} W(xy,\xi)e^{-t\xi}d\xi$$

z powodu nierówności 31 ter, jeżeli przez B'' oznaczymy punkt przecięcia osi rzeczywistych α i prostej B_1B_1'.

Można przypuścić, że kontur C_m ma tak wysoki wskaźnik, iż za punkt X', o którym była mowa na str. 149 (nadole) i 150 (na górze) można przyjąć właśnie punkt B_1, który niech będzie obrazem liczby

$$\xi' = \alpha' + i\beta' = \rho_1'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

Jeżeli obrazami liczb ξ i ξ_{k_m} są punkty X, względnie M_{k_m}, to oczywiście jest $l' = B_1M_{k_m}$, $l = XM_{k_m}$ a nadto jest $\Omega B'' = \alpha = \alpha'$. Wobec nierówności 31 ter (str. 149) musimy jeszcze znaleźć górną granicę dla liczby $\frac{1}{l}$; ponieważ jest $l \geq \frac{1}{2}(\xi_{k_m+1} - \xi_{k_m})$, więc dość znaleźć ~~znaleźć~~ dolną granicę dla różnicy $\xi_{k_m+1} - \xi_{k_m}$.

Otóż przypomnijmy sobie, że liczby $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m, \dots$ są dość dowolne. Wiemy, że istnieje dodatnia i całkowita liczba k_0 taka, iż jest $\xi_k > E.k$, gdy jest $k \geq k_0$, przyczem stała dodatnia E zależna jest jedynie od krzywej C. Okażemy, że istnieje stała i dodatnia liczba C taka, iż nierówność

$$(34) \qquad \xi_{k+1} - \xi_k > CE$$

jest spełniona dla nieskończenie wielu liczb k. Załóżmy bowiem, że takiej stałej C nie ma, iż, jakbyśmy obrali stałą dodatnią C, to zawsze istnieje liczba całkowita i dodatnia k taka, iż jest:

$$(35) \qquad \xi_{k+p+1} - \xi_{k+p} \leq CE$$

dla wszystkich dodatnich i całkowitych wartości na liczbę p. Niech liczba j całkowita i dodatnia jest najmniejszą liczbą taką iż jest

$$Ek < \xi_k \leq Ej$$

przyczem zakładamy, że jest $k \geq k_0$; niech n jest liczbą całkowitą i dodatnią i dowolną, byle było $n+1 > j$. To z nierówności poprzedniej i następującej:

$$\xi_{n+1} > E.(n+1)$$

wynika, że jest

$$(36) \qquad \xi_{n+1} - \xi_k > E.(n+1-j)$$

Z drugiej strony przyjąwszy, że jest $C<1$, otrzymujemy z nierówności 35 następujące

$$\xi_{k+1} - \xi_k \leq CE, \quad \xi_{k+2} - \xi_{k+1} \leq EC, \ldots\ldots, \xi_{n+1} - \xi_n \leq CE$$

a stąd

$$\xi_{n+1} - \xi_k \leq CE(n+1-k)$$

co wobec nierówności 36 daje nierówność

$$E(n+1-j) < CE(n+1-k)$$

a to daje:

$$n+1 < \frac{j-kC}{1-C}$$

co jest absurdem, bo lewa strona może być dowolnie wielka, kiedy strona prawa ma wartość stałą.
Istnieje więc stała dodatnia C taka, iż jest nierówność

$$\xi_{k+1} - \xi_k > CE$$

dla nieskończenie wielu wartości na liczbę k spełniona; najmniejszą z nich, dla której jest zarazem

$$\xi_{k+1} + \xi_k > 2\xi_0$$

oznaczmy przez k_1, a dalsze właśnie przez $k_2, k_3, k_4, \ldots k_m, \ldots$
Wskutek tego jest $l \geq \frac{1}{2} CE$ i $\frac{1}{l} \leq \frac{2}{CE}$
Z równości $\rho_1' \sin\theta' = \beta'$ otrzymujemy

$$\sin\frac{\theta'}{2} = \frac{\beta'}{2\rho_1' \cos\frac{\theta'}{2}}$$

Na mocy nierówności 31 ter (str 149) mamy:

$$(37) \qquad \left| W(\alpha, y, \xi) \right| < \left(\frac{8c\rho_1' \cos\frac{\theta'}{2}}{\beta'} + 2 \right) \frac{2\sqrt{\mathfrak{D}\rho_1'} \cos\frac{\theta'}{2}}{\beta'} \cdot \frac{2\sqrt{(\alpha' - \xi_{k_m})^2 + \beta'^2}}{CE}$$

Ponieważ jest $\alpha' > \xi_{k_m}$, więc jest

$$\sqrt{(\alpha' - \xi_{k_m})^2 + \beta'^2} < \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} \leq \alpha' + \beta'$$

jest bowiem u nas $\beta' > 0$. ~~Lewą stron~~ Prawą stronę nierówności 37 mogę zastąpić przez wyrażenie:

$$\frac{4\sqrt{\mathfrak{D}}}{CE} \left(\frac{8c\rho_1'}{\beta'} + 2 \right) \frac{\sqrt{\rho_1'}(\alpha' + \beta')}{\beta'}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\left| \int_{B'B_1} W(xy\xi)\, e^{-t\xi} d\xi \right| < \frac{4\sqrt{L}}{CE}\left(\frac{8c\rho_1'}{\beta'} + 2\right)\frac{\sqrt{\rho_1'}\,(\alpha'+\beta')}{\beta'} e^{-t\alpha}\int_0^{\beta'} d\beta$$

z powodu, że jest $\alpha = \alpha'$ i że całkę prawej strony wyrachować, otrzymujemy ~~stał~~ stronę prawą w postaci:

$$\frac{4\sqrt{L}}{CE}\left(\frac{8c\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}{\beta'} + 2\right)\sqrt[4]{\alpha'^2+\beta'^2}\,(\alpha'+\beta')\, e^{-t\alpha}$$

w zgodzie z nierównościami 26 i 27 (str. 148) można założyć, że jest np.

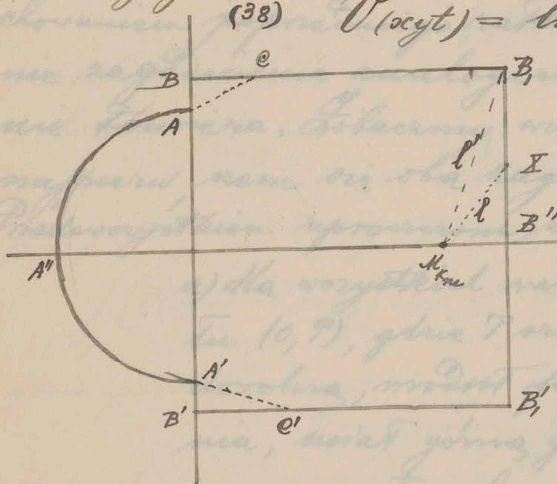
$$\frac{\alpha}{2} < \beta' \leq \alpha$$

przeto powyższe wyrażenie ma granicę równą zeru, gdy liczba α rośnie nieograniczenie. Wobec tego całka

$$\int_{B_1'B_1} W(xy,\xi)\, e^{-t\xi} d\xi$$

ma granicę równą zeru, gdy liczba m rośnie nieograniczenie. Wobec tego jest:

$$(38) \qquad V(xyt) = \lim\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{B'A'A''AB} W(xy,\xi)\, e^{-t\xi} d\xi\right]$$



Okażemy, że będzie można pominąć te całkowania, które się odnoszą do prostych odcinków t. j: do dróg AB i A'B'. ~~W~~ Pomimo jednak wzdłuż tych dróg jest stale $\alpha = 0$ i nie możnaby korzystać z funkcyi wykładniczej, aby wykazać, że obie całki mają granicę równą zeru, więc użyjemy pewnej sztuczki. Na odcinkach BB_1 i $B'B_1'$ uważajmy punkt C, względnie C' dowolnie. Z powodu, że na polu trójkąta ABC lub A'B'C' nie ma żadnych biegunów funkcyi $W(xy,\xi)$, więc jest

$$\int_{ACB} W(xy,\xi)\, e^{-t\xi} d\xi + \int_{BA} W(xy,\xi)\, e^{-t\xi} d\xi = 0$$

$$\int_{A'C'B'} W(xy\xi)\, e^{-t\xi} d\xi + \int_{B'A'} W(xy,\xi)\, e^{-t\xi} d\xi = 0$$

dośc zając się pierwszą równością i otrzymujemy:

$$\int_{AB} W(xy,\xi)\, e^{-t\xi} d\xi = \int_{ACB} W(xy,\xi)\, e^{-t\xi} d\xi$$

gdy liczba R_m jest dość wielka, to funkcya $W(xy\xi)$ wzdłuż drogi ACB spełnia nierówność 31 bis (str. 149). Rozumowaniem zupełnie analogicznym do rozumowania poprzedzającego wykaże się znowu, że granica strony

prawej ostatniej równości jest równa zeru, gdy liczba R_m rośnie nieograniczenie przy dodatniej wartości na zmienną t. Dlatego wolno napisać:

$$(38bis) \qquad V(xy,t)=\lim_{m=\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{A'A''A} W(xy,\xi)\,e^{-t\xi}d\xi\right\}$$

gdzie więc przy całkowaniu wolno się ograniczyć do półkola $A'A''A$, którego promień R_m rośnie nieograniczenie wraz ze wskaźnikiem m.

§ 64. Postawmy jasno kwestyę, którą obecnie traktujemy. Otóż w § 62 podaliśmy rozwiązanie zagadnienia analogicznego do uproszczonego zagadnienia Fouriera – zagadnienie analogiczne polegało na pewnych czterech warunkach skreślonych na str 141 i 142 przy założeniu jedynie, że całka $\mathfrak{L}=\int_{(D)}F^2(xy)\,d\sigma$ ma określone znaczenie. Otóż zbadamy obecnie, o ile trzeba wyspecyalizować funkcyę $F(xy)$ z zachowaniem poprzedniego założenia o istnieniu całki $\mathfrak{L}$, aby rozwiązanie zagadnienia analogicznego rozwiązywało uproszczone zagadnienie Fouriera. Zobaczmy więc jaki jest stosunek obu zagadnień, a więc najpierw, czem się oba zagadnienia różnią.

Przedewszystkiem uproszczone zagadnienie Fouriera wymaga, aby:

a) dla wszystkich wartości dodatnich należących do interwału $(0,T)$, gdzie T oznacza liczbę dodatnią, skończoną, zresztą dowolną, moduł funkcyi $V(xyt)$, będącej rozwiązaniem zagadnienia, miał górną granicę, niezależną od położenia punktu (xy) wewnątrz obszaru D lub na krzywej C;

b) aby do każdego układu dwóch liczb dodatnich (ε,δ), choćby dowolnie małych można było znaleźć dodatnią liczbę η taką, iż, gdy tylko jest $0<t<\eta$, $d\geq\delta$, przyczem d jest najkrótszą odległością punktu (xy) od krzywej C, to jest także:

$$|V(xyt)-F(xy)|<\varepsilon$$

gdzie $F(xy)$ jest funkcyą rzeczywistą.

Że funkcya $F(xy)$ musi być ciągłą wewnątrz obszaru D, to widoczne; jeżeli bowiem żądamy (str 3), żeby funkcya $V(xyt)$ była funkcyą ciągłą, i dążyła do funkcyi $F(xy)$ jednostajnie wewnątrz obszaru D, o ile punkt (xy) jest odległy od krzywej C na więcej niż δ, to jest:

$$\begin{cases} |V(xyt)-F(xy)|<\varepsilon \\ |V(x'y't)-F(x'y')|<\varepsilon \\ |V(xyt)-V(x'y't)|<\varepsilon \end{cases}$$

o ile tylko punkty (xy) i $(x'y')$ są dość blisko siebie, pociągają za sobą

nierówność

$$|F(x'y') - F(xy)| < 3\varepsilon$$

która nas zapewnia o ciągłości funkcyi $F(xy)$ wewnątrz obszaru D.
Łatwo wykażemy (abstrahując na razie od szczegółu co do pochodnej $\frac{\partial V}{\partial t}$), że rozwiązanie uproszczonego zagadnienia jest zarazem rozwiązaniem zagadnienia sformułowanego w §62 (str. 141 i 142). Obszar D rozłóżmy na dwie części Δ_0 i Δ_1; część Δ_0 niech będzie to ogół punktów obszaru D, których odległość od punktów krzywej C nie jest mniejsza liczby δ (o której mowa we warunku b)), część Δ_1 zaś oznacza resztę obszaru D. W obszarze Δ_0, jak widzieliśmy, funkcya $F(xy)$ jest ciągłą, jest więc jej moduł ograniczony i górną granicę oznaczymy przez M; według warunku $\mathfrak{A}$ a) będzie ~~wewnątrz obszaru D~~ istniała stała A dodatnia, taka, iż, gdy jest $0 < t \leq T$, jest

$$|V(xyt)| < A$$

jakiekolwiek ma położenie punkt (xy) w obszarze D. Wobec tego, że w obszarze Δ_0 jest

$$|V(xyt) - F(xy)| < \varepsilon$$

gdy jest $0 < t < \eta$, to więc jest

$$\int_{(\Delta)} [V(x'y't) - F(x'y')]^2 d\tau < \varepsilon^2 \int_{\Delta_0} d\tau + A^2 \int_{\Delta_1} d\tau + 2A^2 \int_{\Delta_1} d\tau + \mathfrak{L}_1$$

gdzie położyliśmy

$$\mathfrak{L}_1 = \int_{\Delta_1} F^2(x'y') d\tau$$

otóż strona prawa nierówności dąży do zera.
Stąd więc wynika, że rozwiązanie uproszczonego zagadnienia Fouriera należy szukać między rozwiązaniami zagadnienia §62.
Jeszcze pozostaje do usprawiedliwienia szczegół następujący: widzieliśmy, że gdy tylko założymy, że istnieje całka $\mathfrak{L}$, to musi istnieć ciągła pochodna $\frac{\partial V}{\partial t}$ wewnątrz obszaru i na krzywej C i tem bardziej to będzie, gdy założymy obok istnienia całki $\mathfrak{L}$, że funkcya $F(xy)$ jest ciągłą wewnątrz obszaru D.
Te uwagi musieliśmy dodać, aby wyjaśnić rozumowanie obecnego rozdziału.

§65. Wykażemy, że rozwiązanie zagadnienia z §62 rozwiązuje uproszczone zagadnienie Fouriera, jeżeli założymy, że funkcya rzeczywista $F(xy)$ jest wewnątrz obszaru D ciągłą, a nadto całka $\mathfrak{L} = \int_D F^2(x'y') d\tau$ ma sens określony.

W równości 38 bis połóżmy

$$(39)\qquad W(xy,\xi) = \int F(\acute{x}\acute{y})\, G(x^{*}y^{*}, \acute{x}\acute{y}, \xi)\, d\tau$$

i otoczmy punkt xy kołem $\Sigma_1^{(2)}$ o promieniu r takim, iżby leżało wewnątrz obszaru D i przez Δ_0 oznaczmy obszar, ograniczony przez koło Σ_1, przez Δ_1 obszar pozostały z obszaru D. Będzie więc:

$$\int_{(A'A''A)} e^{-t\xi}d\xi \int_{(D)} F(\acute{x}\acute{y})\, G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\, d\tau = \int_{(A'A''A)} e^{-t\xi}d\xi \left(\int_{\Delta_1} F(\acute{x}\acute{y})\, G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\, d\tau + \int_{\Delta_0} F(\acute{x}\acute{y})\, G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\, d\tau\right) =$$

$$= \int_{(\Delta_1)} F(\acute{x}\acute{y})\, d\tau \int_{(A'A''A)} G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\, e^{-t\xi}d\xi + \int_{(A'A''A)} e^{-t\xi}d\xi \int_{\Delta_0} F(\acute{x}\acute{y})\, G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\, d\xi$$

a ponieważ drugi wyraz strony prawej jak i całkę

$$\int_{\Delta_0} F(\acute{x}\acute{y})\, d\tau \int_{(A'A''A)} G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\, e^{-t\xi}d\xi$$

można uczynić dowolnie małe przez zmniejszanie promienia r, więc wolno w całce

$$\int_{(A'A''A)} e^{-t\xi}d\xi \int_{(D)} F(\acute{x}\acute{y})\, G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\, d\tau$$

zmienić porządek całkowania, a więc jest, jak łatwo widać:

$$(40)\qquad V = \frac{1}{2\pi i}\int_{(D)} F(\acute{x}\acute{y}) \cdot \left\{\lim_{m=\infty} \int_{(A'A''A)} G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi)\, e^{-t\xi}d\xi\right\} d\tau$$

Przy pomocy tego wzoru zbadamy granicę:

$$\lim_{(t=0)} V(xyt)$$

gdy punkt xy leży wewnątrz obszaru D.

Widzieliśmy, że jest

$$G(xy,\acute{x}\acute{y},\xi) = \frac{f(\xi,\rho)}{2\pi} - u(\acute{x}\acute{y})$$

gdzie ρ oznacza odległość punktów (xy) i $(\acute{x}\acute{y})$. Zbadajmy więc granice:

$$(41)\qquad \begin{cases} A = \lim\limits_{m=\infty} \int_{(A'A''A)} f(\xi\rho)\, e^{-t\xi}d\xi \\[2ex] B = \lim\limits_{m=\infty} \int_{(A'A''A)} u(\acute{x}\acute{y})\, e^{-t\xi}d\xi \end{cases}$$

o ile istnieją one, będzie

$$(40\text{ bis})\qquad V = \frac{1}{2\pi i}\int_{(D)} F(\acute{x}\acute{y}) \left\{\frac{A}{2\pi} - B\right\} d\tau$$

§ 66. Łatwo obliczyć granicę wielkości B, (gdy zdąża liczba t do zera). Już raz (str. 137) zauważyliśmy, co następuje: jeżeli przez D_δ oznaczymy zbiór punktów obszaru D, których odległość od punktów krzywej C nie wynosi mniej niż dodatnia liczba δ, dość mała, zresztą dowolna, jeżeli punkt (xy), biegun funkcji Greena, leży w obszarze D_δ, parametr jej ξ czyni zadość nierównościom 18 (str. 40) i 49 (str. 46)

D_δ

argument θ tego parametru nierówności $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, to iloczyn $|\xi^p \cdot u|$ co do modułu dąży jednostajnie do zera, jakakolwiek całkowita i dodatnia oznacza liczbę p; jednostajność odnosi się do punktów $(x'y')$ obszaru D i argumentów θ parametru ξ. Wobec tego, gdy moduł liczby ξ jest dość wielki, to niezależnie od argumentu θ, byle było $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, jest

(41)
$$|u| < \frac{\varepsilon}{|\xi^p|}$$

gdzie ε oznacza liczbę dodatnią i stałą względem argumentu θ i mieć granicę równą zeru wraz z liczbą $\left|\frac{1}{\xi}\right|$.

Otóż można przypuścić, że półkole $A'A''A$ ma tak wielki promień R_m, że nierówność 41 wzdłuż tego półkola zachodzi. Jest więc:

$$\left|\int_{A'A''A} u e^{-t\xi} d\xi\right| < \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-tR_m\cos\theta} \cdot R_m^{1-p} d\theta = \pi\varepsilon t^{p-1} \cdot e$$

wolno było przyjąć, że liczba t jest dość mała, będąc dodatnią i że jest

$$R_m = \frac{1}{t}$$

a że wolno przyjąć $p > 1$, więc jest

(42)
$$\lim_{(t=0)} B = 0$$

i to osiąganie granicy jest jednostajne, gdy $(x'y')$ oznacza dowolny punkt obszaru D, zaś punkt (xy) leży dowolnie w obszarze D_δ

§67. Zbadajmy granicę A. Uważajmy więc całkę

(43)
$$\int_{(A'A''A)} e^{-t\xi} d\xi \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda$$

o ile jest $\rho \neq 0$ to wolno zmienić porządek całkowania; gdy bowiem l oznacza dodatnią liczbę, to jest:

$$\int_{A'A''A} e^{-t\xi} d\xi \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda = \int_0^l \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} \int_{A'A''A} e^{-t\xi-\mu\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\xi + \int_{A'A''A} e^{-t\xi} d\xi \int_l^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda$$

jeżeli przyjmiemy, że jest

$$\rho \geq \rho_0 > 0$$

gdzie ρ_0 jest liczbą dowolną, byle dodatnią, to będziemy mieli

$$\left|\int_l^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda\right| < \int_l^\infty \frac{e^{-\lambda\sqrt{R_m}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}}{\rho_0} d\lambda = \frac{e^{-l\sqrt{R_m}\sin\frac{\theta}{2}}}{\rho_0\sqrt{R_m}\sin\frac{\theta}{2}}$$

a stąd

$$\left|\int_{A'A''A} e^{-t\xi} d\xi \int_l^\infty \frac{e^{-\mu\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda\right| < \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-l\sqrt{R_m}\sin\frac{\theta}{2}}\sqrt{R_m}}{\rho_0\sin\frac{\theta}{2}} \cdot e^{-tR_m\cos\theta} d\theta$$

strona prawa dąży do zera wraz z liczbą $\frac{1}{l}$. ~~[illegible]~~

Jeżeli jest $\rho \geq \rho_0 > 0$ wolno zamiast całki 43 uważać całkę

(44) $$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} \cdot \int_{A'A''A} e^{-t\xi - \mu\sqrt{p^2+\lambda^2}}\, d\xi$$

która całce 43 jest równa.
Kładźmy w tej całce

$$\xi = \frac{\eta^2}{t}\ ;\quad m = \frac{r}{2\sqrt{t}}\ ;\quad \sqrt{p^2+\lambda^2} = r$$

nadto umówmy się, że liczba η ma część urojoną nieujemną, będzie

$$-t\xi - \mu\sqrt{p^2+\lambda^2} = -\eta^2 - 2m\mu\sqrt{t}$$

ale jest $\mu^2 = -\xi = -\frac{\eta^2}{t}$, więc jest $(\mu\sqrt{t})^2 = -\eta^2$, a stąd

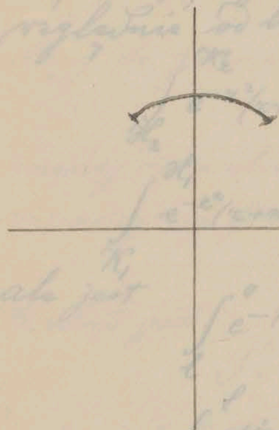
$$\mu\sqrt{t} = -\eta i$$

przeto jest $$-t\xi - \mu\sqrt{p^2+\lambda^2} = -\eta^2 + 2m\eta i$$

Zbadajmy granice całkowania dla zmiennej η. Półkolu $A'A''A$ ~~od~~ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ odpowiada łuk koła o promieniu $\sqrt{R_m t}$ przecinający oś urojonych ~~dodatnią~~ η dodatnią na płaszczyźnie zmiennej zespolonej η. Znajdźmy końce tego łuku. Punkty A i A' są ~~obrazami~~ geometrycznymi liczb $(+R_m i)$, względnie $(-R_m i)$; połóżmy $\eta = \tau + \sigma i$ $(\sigma \geq 0)$, to będzie $\tau^2 - \sigma^2 + 2\tau\sigma i = \begin{cases} -R_m t i \\ +R_m t i \end{cases}$, co daje $\tau = \mp \frac{\sqrt{2tR_m}}{2}$, $\sigma = + \frac{\sqrt{2tR_m}}{2}$; kładąc więc $\frac{\sqrt{2tR_m}}{2} = p$ mamy jako krańce łuku całkowania na płaszczyźnie zmiennej zespolonej η punkty

$$-p + ip\ ;\quad +p + ip$$

A więc będzie



$$\int_{A'A''A} e^{-t\xi - \mu\sqrt{p^2+\lambda^2}}\, d\xi = \frac{2}{t}\int_{-p+ip}^{p+ip} e^{-\eta^2 + 2mi\eta}\, \eta\, d\eta$$

Liczbom ξ_k, które leżały na ujemnej osi rzeczywistych płaszczyzny zmiennej zespolonej ξ, ~~będą oczywiście~~ odpowiadały liczby η_k leżące na dodatniej osi urojonej płaszczyzny zmiennej η; ~~inne liczby ξ_k~~ reszta liczb η_k będzie leżała na osi rzeczywistych. Połóżmy

$$x = \eta - mi$$

przyczem możemy, że liczba dodatnia m jest dość wielka, gdyż dość obrać wartość na liczbę t odpowiednio małą; przez to możemy doprowadzić do tego, że liczbom η_k będą odpowiadały liczby x_k leżące w III^{cim} i IV kwadrancie płaszczyzny zespolonej zmiennej x.

Będziemy mieli $\eta^2 = -m^2 + 2mxi + x^2$; $2mi\eta = -2m^2 + 2mix$, więc jest

$$-\eta^2 + 2mi\eta = m^2 - x^2$$

wobec tego będzie

$$\int_{A'A''A} e^{-t\xi-\mu\sqrt{p^2\lambda^2}}\,d\xi = \frac{2}{t}\,e^{-m^2}\int_{-p+i(p-m)}^{p+i(p-m)} e^{-z^2}(z+mi)\,dz$$

Oznaczmy przez $H_1, H_2; K_1, K_2$ obrazy geometryczne liczb

$$+p+i(p-m)\ ;\ -p+i(p-m)\ ;\ p\ ;\ -p$$

Można przyjąć, że jest $p-m>0$, a więc w czworoboku o wierzchołkach $H_1 H_2 K_2 K_1$ nie leży żadna z liczb z_k. Można więc w całce strony prawej ostatniej równości zamiast łuku, który ~~przechodzi~~ łuk na płaszczyźnie zmiennej η przechodzi na płaszczyźnie zmiennej z uważać drogę łamaną złożoną z odcinków H_2K_2; K_2K_1; K_1H_1 t.j. uważamy sumę następujących całek:

$$(45)\qquad \int_{H_2}^{K_2} e^{-z^2}(z+mi)\,dz + \int_{K_2}^{K_1} e^{-z^2}(z+mi)\,dz + \int_{K_1}^{H_1} e^{-z^2}(z+mi)\,dz$$

Okażemy, że pierwsza i trzecia całka zdąża do zera wraz z liczbą $\left(\frac{1}{p}\right)$.

Połóżmy dla krótkości

$$p-m=l$$

Na odcinkach H_2K_2, względnie K_1H_1 kładziemy $z=-p+iv$ względnie $z=p+iv$ przyczem zmienna v zmienia się od liczby l do liczby 0, względnie od liczby 0 do liczby l; wobec tego jest

$$\int_{H_2}^{K_2} e^{-z^2}(z+mi)\,dz = \int_l^0 e^{-(iv-p)^2}(iv-p)\,i\,dv - \int_l^0 e^{-(iv-p)^2} m\,dv$$

$$\int_{K_1}^{H_1} e^{-z^2}(z+mi)\,dz = \int_0^l e^{-(iv+p)^2}(iv+p)\,i\,dv - \int_0^l e^{-(iv+p)^2} m\,dv$$

ale jest

$$\int_l^0 e^{-(iv-p)^2}(iv-p)\,i\,dv = \left(-\frac{e^{-(iv-p)^2}}{2}\right)_l^0 = -\frac{e^{-p^2}}{2} + \frac{e^{-[i(p-m)-p]^2}}{2}$$

$$\int_0^l e^{-(iv+p)^2}(iv+p)\,i\,dv = -\frac{e^{-[i(p-m)+p]^2}}{2} + \frac{e^{-p^2}}{2}$$

tedy jest

$$\int_l^0 e^{-(iv-p)^2}(iv-p)\,i\,dv + \int_l^0 e^{-(iv+p)^2}(iv+p)\,i\,dv = e^{(p-m)^2-p^2}\sin[2p(p-m)]$$
$$= e^{-2pm+m^2}\sin[2p(p-m)]$$

co maleje do zera nieograniczenie wraz z liczbą $\left(\frac{1}{p}\right)$.

Nadto jest

$$-\int_l^0 e^{-(iv-p)^2} m\,dv - \int_0^l e^{-(iv+p)^2} m\,dv = m\int_0^l\left[e^{-(iv-p)^2} - e^{-(iv+p)^2}\right]dv = 2m\int_0^l e^{v^2-p^2}\sin(vp)\,dv$$

ale jest: $\left|\int_0^l e^{v^2-p^2}\sin(vp)\,dv\right| < e^{(p-m)^2-p^2}(p-m) = e^{m^2-2pm}(p-m)$

strona prawa dąży więc do zera wraz z liczbą $(\frac{1}{p})$. W ten sposób wykazaliśmy, że pierwsza i ostatnia całka ~~[illegible]~~ sumy (45) zdążają do zera wraz z liczbą $(\frac{1}{p})$. Wskutek tego dość zbadać całkę:

$$\frac{2}{t}\, e^{-m^2}\int_{-p}^{+p} e^{-z^2}(z+mi)\,dz$$

gdy liczba p rośnie nieograniczenie, przyczem drogą całkowania jest oś rzeczywistych na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z.

Ale jest
$$\int_{-p}^{+p} e^{-z^2} z\,dz = \int_{-p}^{0} e^{-z^2} z\,dz + \int_{0}^{+p} e^{-z^2} z\,dz$$
i suma ta jest równą zeru, bo przez podstawienie $z=-\xi$ mogę się przekonać, że pierwsza całki różni się od drugiej tylko znakiem.

Pozostanie więc całka
$$\frac{2}{t}\, e^{-m^2} mi\int_{-p}^{+p} e^{-z^2}dz$$
czyli przy dawnych oznaczeniach (str 158)

(46) $$\frac{i\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}{\sqrt{t^3}}\cdot e^{-\frac{\rho^2+\lambda^2}{4t}}\int_{-p}^{+p} e^{-z^2}dz$$

Otóż całka
$$\int_{-p}^{+p} e^{-z^2}dz$$
dąży do granicy
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz$$
znanej w analizie pod nazwą całki Laplace'a; jeżeli całkę Laplace'a oznaczymy przez J:
$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz$$
to stąd jest
$$J^2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z^2+\xi^2)}dz\,d\xi$$
co przez podstawienie $z=u\cos v$, $\xi=u\sin v$ daje się obliczyć:
$$J^2=\int_0^{2\pi} dv\int_0^{\infty} e^{-u^2}u\,du=\pi$$
więc stąd jest
$$J=\sqrt{\pi}$$
bo całka J ma wartość dodatnią.

Całka (46) dąży więc do wartości

(47) $$\frac{i\sqrt{\rho^2+\lambda^2}\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{t^3}}\, e^{-\frac{\rho^2+\lambda^2}{4t}}$$

gdy liczba p rośnie nieograniczenie; do tej wartości dąży więc całka
$$\int_{A'A''A} e^{-t\xi-\mu\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}\,d\xi$$

jeżeli wartość liczby t jest dodatnia i jeżeli jest $\rho \geq \rho_0 > 0$.
Wskutek tego wyrażenie 44 (str 158) dąży do granicy:

$$\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{t^3}}\int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2+\lambda^2}{4t}}d\lambda = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{t^3}}e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}d\lambda$$

w całce strony prawej kładziemy: $\lambda = 2x\sqrt{t}$, to będzie:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}d\lambda = 2\sqrt{t}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi t}$$

jest poczem wyrażenie A (równość 41 str 156) równe wielkości

(48) $$A = \frac{i\pi}{t}\cdot e^{-\frac{\rho^2}{4t}}$$

oczywiście przy założeniu, że liczba t ma wartość dodatnią i że jest $\rho \geq \rho_0 > 0$
Ponieważ liczba ρ_0 jest dowolna, więc łatwo można wykazać, iż wyrażenie 48 wolno podstawić w wyrażenie 40 bis (str 156) za literę A, ponieważ dalej wykazaliśmy w §66, że wielkość B dąży jednostajnie do zera wraz z liczbą t w całym obszarze D, o ile punkt xy zostaje w obszarze D_δ, więc różnicę

(49) $$V(xyt) - \frac{1}{4\pi t}\int_{(D)} F(x'y')e^{-\frac{\rho^2}{4t}}d\tau$$

można co do modułu uczynić dowolnie małą, gdy się obierze liczbę dodatnią t dość małą, a gdy punkt (xy) pozostaje stale w obszarze D_δ.
Wyszukamy granicę drugiego wyrazu różnicy 49, gdy liczba t dąży do zera przez wartości dodatnie.
Punkt (xy) obszaru D_δ otoczmy kołem Σ o promieniu R takiem, że koło Σ leży wewnątrz obszaru D; obszar ograniczony przez to koło oznaczmy przez D_0, zaś pozostałą część obszaru D oznaczmy przez D_1 i jest więc

(50) $$\frac{1}{4\pi t}\int_{(D)} F(x'y')e^{-\frac{\rho^2}{4t}}d\tau = J_0 + J_1$$

gdzie kładziemy:

(51) $$J_0 = \frac{1}{4\pi t}\int_{D_0} F(x'y')e^{-\frac{\rho^2}{4t}}d\tau \;;\; J_1 = \frac{1}{4\pi t}\int_{D_1} F(x'y')e^{-\frac{\rho^2}{4t}}d\tau$$

Ponieważ dla punktów $(x'y')$ obszaru D_1 jest $\rho \geq R$, więc jest

$$|J_1|^2 < \frac{1}{16\pi^2 t^2}\int_{D_1} F^2(x'y')d\tau \int_{D_1} e^{-\frac{\rho^2}{2t}}d\tau$$

$$\int_{D_1} e^{-\frac{\rho^2}{2t}}d\tau < \int_0^{2\pi}d\varphi\int_R^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2t}}\rho\, d\rho = 2\pi\left(-t e^{-\frac{\rho^2}{2t}}\right)_R^\infty = 2\pi t\cdot e^{-\frac{R^2}{4t}}$$

a więc jest

(51) $$|J_1| < \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{R^2}{4t}} < \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{t}}{R^2}$$

gdzie oznaczyliśmy, jak dotąd stale, $L = \int_{(D)} F^2(x'y')d\tau$. Stąd widać, że całka

J_1 dąży wraz z liczbą t do zera i to jednostajnie dla punktów (xy) obszaru D_δ. Przejdźmy do całki J_0; jest:

$$J_0 = \frac{1}{4\pi t}\int_{D_0} F(x'y')\,e^{-\frac{r^2}{4t}}\,d\tau = \frac{1}{4\pi t}\int_0^R e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\rho\,d\rho\int_0^{2\pi} F(x'y')\,d\varphi$$

pomimo, jak widzieliśmy na str. 154, funkcya $F(x'y')$ jest ciągłą wewnątrz obszaru D, przeto jest

$$\lim_{(\rho=0)}\int_0^{2\pi} F(x'y')\,d\varphi = 2\pi\cdot F(xy)$$

połóżmy więc

$$\int_0^{2\pi} F(x'y')\,d\varphi = 2\pi\, F(xy) + \eta$$

do każdej dowolnie małej liczby dodatniej ε można obrać tak mały promień R, iż dla $\rho \le R$ jest $|\eta| < \varepsilon$, jakiekolwiek jest położenie punktu xy w obszarze D_δ, można bowiem łatwo wykazać, że całka $\int_0^{2\pi} F(x'y')\,d\varphi$ jest funkcyą ciągłą względem promienia koła, do którego się odnosi i względem środka tego koła, o ile promień dość mały a środek leży w obszarze D_δ. Jest więc:

$$J_0 = \frac{1}{4\pi t}\int_0^R e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\rho\,d\rho\,\big(2\pi\, F(xy) + \eta\big) =$$

$$= \frac{F(xy)}{2t}\int_0^R e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\rho\,d\rho + \frac{1}{4\pi t}\int_0^R \eta\, e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\rho\,d\rho$$

a że jest

$$\int_0^R e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\rho\,d\rho = \Big(-2t\,e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\Big)_0^R = 2t - 2t\,e^{-\frac{R^2}{4t}}$$

więc jest

$$J_0 = F(xy) + \gamma$$

gdzie położyliśmy:

$$\gamma = -e^{-\frac{R^2}{4t}} + \frac{1}{4\pi t}\int_0^R \eta\, e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\rho\,d\rho$$

nadto jest

$$|\gamma| < e^{-\frac{R^2}{4t}} + \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

stąd widać, że wielkość γ dąży do zera wraz z liczbą t jednostajnie dla wszystkich punktów xy obszaru D_δ; dla nich więc można uczynić różnicę

$$V(xyt) - F(xy)$$

co do bezwzględnej wartości dowolnie małą wraz z liczbą t. Tem samem stwierdziliśmy, że szereg 11 (str. 143) spełnia warunek b str. 154.

§68. Znajdziemy górną granicę funkcyi $V(xyt)$ w całym obszarze D, gdy jest $0 < t \le T$, gdzie liczba T jest zresztą dowolną, wykażemy, że można ją wybrać niezależnie od położenia punktu xy obszaru D, a zależnie, w ogóle mówiąc, od liczby T.

Wskutek rezultatu §67 jest widoczne, że górna granica funkcyi $V(xyt)$

w obszarze D_ξ zależeć będzie od górnej granicy modułu funkcyi $F(xy)$ w obszarze D. Jeżelibyśmy więc założyli, że funkcya $F(xy)$, będąc ciągłą wewnątrz obszaru D, przy zbliżaniu się punktu xy do jednego choćby punktu na krzywej C rośnie nieograniczenie co do modułu, to górna granica funkcyi $V(xyt)$ nie będzie istniała, jak nie istnieje dla funkcyi $F(xy)$. Dlatego odrazu zakładamy, że funkcya $F(xy)$, będąc ciągłą wewnątrz obszaru D, jest ograniczona w całym obszarze D.

Górną granicę modułu funkcyi $F(xy)$ oznaczymy, jak dotąd, literą M i wyjdziemy z równości 38bis (str 154):

$$V(xyt) = \lim_{R=\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{A'A''A} W(xy\xi)e^{-t\xi}d\xi\right]$$

przyczem R oznacza promień półkola $A'A''A$ określonego na str 148 i 149. Zajmiemy się najpierw wypadkiem $h'=0$. Z własności funkcyi $W(xy\xi)$ wiadomo, że (str 95) można położyć

$$W(xy\xi) = \phi(xy\xi) - u_0 - v$$

jeżeli tylko parametr ξ, co wolno przyjąć, spełnia nierówności 18 (str 40), gdzie jest:

$$\phi(xy\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_D F(x'y')f(\xi\rho)d\sigma$$

przyczem ρ oznacza odległość punktów (xy) i $(x'y')$; u_0 jest potencyałem warstwy pojedynczej, rozpostartej wzdłuż krzywej C o gęstości $\sigma_0 = 2\frac{d\Phi}{dN}$; v jest pewnym potencyałem warstwy pojedynczej, rozpostartej również wzdłuż krzywej C, który spełnia nierówność 102 (str 95), jakiekolwiek jest położenie punktu xy w obszarze D. Wobec tego jest:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{A'A''A} v e^{-t\xi}d\xi\right| < \frac{32Mc^2}{L\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-t\rho_1\cos\theta}}{\rho_1^{1/2}\sin^5\theta/2}d\theta < \frac{32Mc^2 e\sqrt{t}}{L\sin^5\frac{\pi}{4}}$$

jeżeli założymy, że promień R półkola $A'A''A$ jest dość wielki i zdąża do nieskończoności w ten sposób, iż

$$R = \frac{1}{t}$$

przyczem liczba t zdąża do zera. Nierówność ta jest ważna dla dowolnego położenia punktu xy w obszarze D.

Jest więc

$$(52)\qquad V(xyt) = \lim_{R=\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{A'A''A}\phi(xy\xi)e^{-t\xi}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{A'A''A}u_0 e^{-t\xi}d\xi\right\} + \varepsilon$$

gdzie wielkość ε, zależna od całki z funkcyi v, zdąża do zera wraz z liczbą t.

Zbadajmy więc całki:

$$(53)\qquad J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{A'A''A}\phi(xy\xi)e^{-t\xi}d\xi \quad ; \quad J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{A'A''A}u_0 e^{-t\xi}d\xi$$

gdy promień R półkola $A'A''A$ rośnie nieograniczenie.

Jeżeli przypomnimy sobie definicyę funkcyi $\phi(xy\xi)$, to wykażemy, że pewna

zmiana porządku całkowania jest dozwolona i że przeto jest

$$J_1 = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\mathfrak{D}} F(x'y')\,d\tau \int_{A'A''A} f(\varrho\mu)\, e^{-t\xi}\, d\xi$$

gdzie ϱ jest odległością punktów (xy) i $(x'y')$. Na mocy pierwszej z równości 41 (str 156) i równości 48 (str 161) jest

$$\lim_{(R=\infty)} J_1 = \frac{1}{4\pi t}\int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\, e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\, d\tau$$

a stąd jest

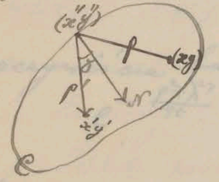
$$\left|\lim_{(R=\infty)} J_1\right| \leq \frac{M}{4\pi t}\int_{\mathfrak{D}} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\, d\tau < \frac{M}{4\pi t}\int_{(N)} e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}\, d\tau$$

gdzie litera N wskazuje na to, że na całą nieograniczoną płaszczyznę N, na której leży obszar $\mathfrak{D}$, rozciągnęliśmy całkowanie. Jest więc

$$\left|\lim_{(R=\infty)} J_1\right| < M$$

jakiekolwiek położenie ma punkt xy w obszarze $\mathfrak{D}$ i gdy wartość liczby t jest dodatnią.

Zwróćmy się do całki J_2. Dla lepszego miejsca, w którem elementy tej i następnych całek wzięto, oznaczymy współrzędne punktów krzywej C przez $x''y''$ i przez ϱ' odległość punktów $(x'y')$ i $(x''y'')$. Jest więc



$$\phi(x''y'';\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\, f(\varrho'\mu)\, d\tau$$

$$u_0(xy\xi) = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\phi(x''y'',\xi)}{dN}\, f(\varrho\mu)\, ds$$

gdzie ϱ oznacza znów odległość punktów (xy) i $(x''y'')$.

Oznaczmy przez j kąt między normalną wewnętrzną w punkcie $x''y''$ a odcinkiem ϱ', skierowanym od punktu $(x''y'')$ do punktu $(x'y')$; tedy jest

$$\frac{d\phi(x''y''\xi)}{dN} = \frac{-1}{2\pi}\int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\,\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos j\, d\tau$$

a więc jest

$$u_0(xy\xi) = \frac{-1}{2\pi^2}\int_{C} f(\varrho\mu)\, ds \int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\,\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos j\, d\tau$$

(54) $$J_2 = -\frac{1}{4\pi^3 i}\int_{(A'A''A)} e^{-t\xi}\, d\xi \int_{C} f(\varrho\mu)\, ds \int_{(\mathfrak{D})} F(x'y')\,\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos j\, d\tau$$

Przez uważanie obszaru $\mathfrak{D}_\delta$ i otoczenie punktu (xy) dość małym kołem wykazać można, że wolno tu zmienić porządek całkowań; pamiętając o znaczeniu funkcyi $f(\varrho\mu)$, $f(\varrho'\mu)$, otrzymamy:

$$J_2 = -\frac{1}{4\pi^3 i}\int_{C} ds \int_{\mathfrak{D}} F(x'y')\cos j\, d\tau \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}}\,\frac{d}{d\varrho'}\left[\int_0^\infty \frac{d\lambda'}{\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2}}\int_{(A'A''A)} e^{-\mu\left(\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2}\right)-t\xi}\, d\xi\right]$$

Otóż na mocy równości 47 (str 160), gdy promień R półkola $A'A''A$ dąży do nieskończoności, to całka

$$\int_{A'A''A} e^{-\mu\left(\sqrt{\varrho^2+\lambda^2}+\sqrt{\varrho'^2+\lambda'^2}\right)-t\xi}\, d\xi$$

dąży do wartości:
$$\frac{(\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2})\,i\sqrt{\pi}}{t^{3/2}}\,e^{-\frac{(\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}}$$
i wskutek tego całka J_2 dąży do granicy, którą można napisać w formie:

(55) $$-\frac{1}{4\pi^{\frac{5}{2}}t^{3/2}}\int_C ds\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}\int_0^\infty d\lambda'\int_D F(x'y')\cos\gamma\,d\tau\,\frac{d}{d\rho'}\left\{\frac{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}}{\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}}\cdot e^{-\frac{(\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}}\right\}$$

Znajdźmy górną granicę dla całki:
$$U=\int_{(D)}F(x'y')\cos\gamma\,d\tau\,\frac{dK}{d\rho'}$$

gdzie przez K oznaczamy wyrażenie będące w równości 55 w nawiasie; otóż jest
$$|U|<-2\pi M\int_0^\infty\frac{dK}{d\rho'}\rho'd\rho'=-2\pi M\left[(K\rho')_0^\infty-\int_0^\infty K d\rho'\right]=2\pi M\int_0^\infty K d\rho'$$
wobec tego będziemy mieli:
$$\left|\int_0^\infty U d\lambda'\right|<\int_0^\infty d\lambda'\int_0^\infty\frac{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}}{\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}}\cdot e^{-\frac{(\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}}d\rho'=$$
$$=\sqrt{\rho^2+\lambda^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{(\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}}}{\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}}d\rho'd\lambda'+\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{(\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}}d\rho'd\lambda'$$
oczywiście będzie strona prawa mniejsza od wyrażenia:
$$e^{-\frac{\rho^2+\lambda^2}{4t}}\left\{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{\rho'^2+\lambda'^2}{4t}}}{\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}}d\rho'd\lambda'+\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{\rho'^2+\lambda'^2}{4t}}d\rho'd\lambda'\right\}$$
kładąc $\rho'=z\cos\varphi$, $\lambda'=z\sin\varphi$, otrzymujemy:
$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{\rho'^2+\lambda'^2}{4t}}}{\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}}d\rho'd\lambda'=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4t}}dz=4\pi\sqrt{t}\int_0^\infty e^{-\xi^2}d\xi=2\pi^{3/2}t^{1/2}$$
$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{\rho'^2+\lambda'^2}{4t}}d\rho'd\lambda'=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4t}}z\,dz=8\pi t\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi\,d\xi=4\pi t$$

Wobec tego jest:
$$|\lim J_2|<\frac{1}{4\pi^{5/2}t^{3/2}}\int_C ds\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}e^{-\frac{\rho^2+\lambda^2}{4t}}\cdot 2\pi M\left\{2\pi^{3/2}t^{1/2}\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+4\pi t\right\}$$
czyli jest: (56)
$$|\lim J_2|<\frac{M}{t}\int_C e^{-\frac{\rho^2}{4t}}ds\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}d\lambda+\frac{2M}{\pi^{1/2}t^{1/2}}\int_C e^{-\frac{\rho^2}{4t}}ds\int_0^\infty\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}}d\lambda.$$
Aby podać górną granicę strony prawej rozróżnimy dwa wypadki zależnie od tego, czy punkt (xy) leży w takiej części obszaru D iż istnieje dolna granica δ, różna ~~dla~~ od zera, dla zmiennej ρ, czy też tak nie jest.

A) Niech jest $\rho\geq\delta$, to ponieważ jest
$$\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}d\lambda=\sqrt{\pi t}$$

więc będzie
$$\int_C e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds \leq e^{-\frac{\delta^2}{4t}} \int_C ds = \Lambda e^{-\frac{\delta^2}{4t}}$$
$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda < \frac{1}{\delta}\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} d\lambda = \frac{1}{\delta}\sqrt{\pi t}$$
a więc jest
$$\left|\lim J_2\right| < \frac{M\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{4t}}\Lambda + \frac{2M}{\delta} e^{-\frac{\delta^2}{4t}}\Lambda$$
przyczem Λ oznacza długość łuku krzywej C. Po stronie prawej uwzględniamy nierówność
$$e^{-\frac{\delta^2}{4t}} < \frac{4t}{\delta^2}$$
więc będzie
$$(57) \qquad \left|\lim J_2\right| < \left(\frac{4M\sqrt{\pi t}}{\delta^2} + \frac{8Mt}{\delta^3}\right)\Lambda$$
stąd wynika, że, jeżeli ograniczymy się do interwału
$$0 < t \leq T$$
jak wyżej rzekło, można na wyraz $\left|\lim_{r=\infty} J_2\right|$ podać górną granicę, zależną od liczby T i od liczby δ.

B) Załóżmy, że punkt (xy) leży dość blisko krzywej C lub na niej; wzdłuż najkrótszej odległości punktu (xy) od krzywej C przy pierwszej ewentualności, a ~~wzd~~ przy drugiej ewentualności wzdłuż normalnej do krzywej C w punkcie (xy) kładę oś (x), a za oś y biorę styczną spodka ~~normalnej~~ osi x na krzywej C; krzywą ~~C~~ C dzielimy na części C_0 i C_1, z których druga część nie zawiera początku spółrzędnych i oczywiście istnieje stała dodatnia ~~d~~ d taka, iż punkt (xy) jest odległy od punktów łuku C_1 nie ~~mniej~~ na mniej, niż d, jest więc $\rho \geq d$; częścią C_0 jest łuk pozostały. Połóżmy

$$\int_C e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds = \int_{C_0} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds + \int_{C_1} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds$$
$$\int_C e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} d\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} = \int_{C_0} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda + \int_{C_1} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda$$

na mocy ~~nierówności~~ rozumowania podobnego jak we wypadku A otrzymamy:
$$\int_{C_1} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds + \int_{C_1} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda < \left(\frac{4M\sqrt{\pi t}}{d^2} + \frac{8Mt}{d^3}\right)\Lambda$$
Ponieważ wolno przyjąć, że łuk C_0 jest tak mały, iż spełnia trzeci z warunków na krzywą C (str 3) i wolno przyjąć, że, skoro jest

$$ds = \frac{dy''}{\cos\vartheta}$$

gdzie ϑ oznacza kąt między osią x wzdłuż normalnej skierowanej na wewnątrz obszaru D a normalną wewnętrzną do krzywej C narysowaną w miejscu ds, to będzie

$$\left|\frac{1}{\cos\vartheta}\right| < 2$$

jeżeli $(-\varepsilon, +\eta)$ są średnemi końców łuku C_0, to jest:

$$\int_{C_0} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds < 2\int_{-\varepsilon}^{+\eta} e^{-\frac{y''^2}{4t}} dy'' < 4\int_0^\infty e^{-\frac{y''^2}{4t}} dy'' = 4\sqrt{\pi t}$$

$$\int_{C_0} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda < 4\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{y''^2+\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{y''^2+\lambda^2}} dy'' d\lambda = 8\pi\sqrt{\pi t}$$

A więc jest ostatecznie

(58) $$\left|\lim J_2\right| < \left(\frac{4M\sqrt{\pi t}}{d^2} + \frac{8Mt}{d^3}\right)\Lambda + 4\pi M + 16M.$$

Możemy więc, łącząc rezultaty obu wypadków, powiedzieć, że górna granica modułu wyrażenia $\lim J_2$ nie zależy od położenia punktu (xy) w obszarze D, tylko co najwyżej (w najgorszym razie) od ~~stałej~~ stałej T.

Na mocy równości 52 i 53 (str 163) jest

$$V(xyt) = \lim_{R=\infty} J_1 + \lim_{R=\infty} J_2 + \varepsilon$$

a więc, jak wykazaliśmy, istnieje stała dodatnia $C(T)$ zależna jedynie od liczby T i taka, że jest

(59) $$|V(xyt)| < C(T). M.$$

jakiekolwiek jest położenie punktu (xy) w obszarze D.

We wypadku $h'=0$, ponieważ żadna z liczb ξ_k nie jest ujemna, więc dla funkcji

$$V = \sum_1^\infty A_k U_k e^{-\xi_k t}$$

możnaby znaleźć górną granicę na funkcję V niezależną także od liczby T; albowiem w tym wypadku przy dodatniej wartości na zmienną t będzie:

(60) $$|V|^2 < \sum_1^\infty A_k^2 \sum_1^\infty U_k^2 e^{-2\xi_k t} < \frac{1}{4t^2}\sum_1^\infty A_k^2 \sum_1^\infty \frac{U_k^2}{\xi_k^2}$$

na mocy nierówności 59 ważnej dla interwału $0 < t \leq T$ i nierówności 60 i 29 (str 126) dochodzimy do wniosku, że istnieje stała i dodatnia C' niezależna ~~jest~~ od położenia punktu (xy) w obszarze D i zmiennej t, byle była ta zmienna dodatnią, która to stała spełnia nierówność

(61) $$|V| < C'. M.$$

§ 69. Zajmiemy się obecnie wypadkiem $h'=1$. W równości:

$$V(xyt) = \lim_{R=\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{(A'A''A)} W(xy\xi)\, e^{-t\xi}\, d\xi \right]$$

połóżmy

$$W(xy\xi) = \varphi - v + v_0$$

stosownie do rozumowań § 45 (str. 96); v jest pewnym potencyałem warstwy pojedynczej, rozpostartej wzdłuż krzywej C, który czyni zadość nierówności 109 (str. 97) i znowu będzie można wykazać, że całka

$$\int_{(A'A''A)} v e^{-t\xi} d\xi$$

zdąża do zera wraz z liczbami $\frac{1}{R}, t$. Ponieważ dalej funkcya φ jest tego samego kształtu co funkcya Φ poprzedniego paragrafu, tylko odnosi się do całej nieograniczonej płaszczyzny, ponieważ gęstość warstwy pojedynczej, której potencyałem jest funkcya v_0, równa się funkcyi $2\frac{d\varphi}{dN}$, więc z tego widać, że formalnie zostaną rachunki te same, co w poprzednim paragrafie i będzie więc istniała stała dodatnia $C(T)$ niezależna od położenia punktu (xy) w obszarze D, a zależna od liczby T tak, iż jest

$$|V(xyt)| < C(T).M$$

gdy jest $0 < t \leq T$; M oznacza znowu górną granicę modułu funkcyi $F(xy)$ w obszarze D. We wypadku, gdy funkcya h jest stale nieujemną wzdłuż krzywej C, żadna z liczb ξ_k nie jest ujemną, a więc wtedy stała $C(T)$ od krańca T może nie zależeć.

§ 70. Załóżmy, że funkcya $F(xy)$ jest ciągła w całym obszarze D. Zapytajmy, czy funkcya $V(xyt)$ zdąża do funkcyi $F(xy)$, gdy zmienna t, będąc dodatnią, zmierza do zera, a punkt (xy) ma dowolne położenie w obszarze D.

Zajmijmy się wypadkiem $h'=1$. W tym jest:

$$V(xyt) = U_1 + U_2 + E \tag{62}$$

gdzie jest

$$U_1 = \frac{1}{4\pi t} \int_N F(x'y') e^{-\frac{\rho^2}{4t}} d\tau \tag{63}$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi^{\frac{5}{2}} t^{3/2}} \int_C ds \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} \int_0^\infty d\lambda' \int_N F(x'y') \cos\gamma\, d\tau \frac{d}{d\rho'} \left[\frac{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}}{\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}} e^{-\frac{(\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2})^2}{4t}} \right] \tag{64}$$

gdzie ρ oznacza odległość dowolnego punktu $(x''y'')$ krzywej C od punktu xy, ρ' oznacza odległość dowolnego punktu $(x'y')$ obszaru D od punktu $(x''y'')$ na krzywej C leżącego; nadto wielkość E zdąża do zera wraz z liczbą t i jednostajnie dla wszystkich punktów (xy) obszaru D; litera N oznacza że całkowanie ma być rozpostarte na całą nieograniczoną płaszczyznę.

Jakiśkolwiek ma położenie punkt (xy) w całym obszarze D, mogę położyć w całce U_1:

$$F(\acute{x}\acute{y}) = F(xy) + \eta$$

i będzie przeto

$$U_1 = \frac{F(xy)}{4\pi t}\int_N e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}d\tau + \frac{1}{4\pi t}\int_N \eta e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}d\tau$$

a, że jest

$$\int_N e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}d\tau = 4\pi t$$

więc jest

$$U_1 = F(xy) + \frac{1}{4\pi t}\int_N \eta e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}d\tau$$

Okażemy, że całkę prawej strony można uczynić dowolnie małą, gdy zmienna t dąży do zera przy jakiemkolwiek położeniu punktu (xy) w obszarze D. Trzeba w tym celu punkt (xy) otoczyć kołem Σ o promieniu R dość małym; do każdej dowolnej i dodatniej liczby ε można znaleźć taką dodatnią liczbę d, iż jest $|\eta| < \varepsilon$, gdy jest ~~$d < t$~~ $R < d$; ponieważ poza kołem jest $|\eta| < 2M$, więc mamy:

$$\left|\frac{1}{4\pi t}\int_N \eta e^{-\frac{\varrho^2}{4t}}d\tau\right| < \varepsilon + 2M e^{-\frac{R^2}{4t}}$$

Ostatecznie widać, że całka U_1 zdąża w całym obszarze D jednostajnie do wartości funkcyi $F(xy)$, gdy zmienna t dąży do zera; wielkość bowiem ε jest dowolna i można np. przyjąć, że jest $\varepsilon = t$.

W całce U_2 wielkość ϱ' jest odległością punktu $(\acute{x}\acute{y})$ leżącego na krzywej C i ~~z~~ dowolnego punktu $(\acute{x}\acute{y})$ obszaru D lub D', zaś kąt γ, jak wiemy, jest kątem zawartym między normalną wewnętrzną punktu $\acute{x}\acute{y}$, a odcinkiem skierowanym od punktu $\ddot{x}\ddot{y}$ do punktu $\acute{x}\acute{y}$. Z punktu $(\ddot{x}\ddot{y})$, jako środka wyrysujmy koło Σ_1 o promieniu R'; niech ε_1 jest liczbą dowolnie małą i dodatnią; otóż można zawsze obrać tak liczbę R', iż na kole Σ_1 i wewnątrz niego jest:

(65) $$|F(\acute{x}\acute{y}) - F(\ddot{x}\ddot{y})| < \varepsilon_1$$

Skąd:

$$F(\acute{x}\acute{y}) = F(\ddot{x}\ddot{y}) + \eta$$

uważajmy całkę

$$L(R') = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1} F(\acute{x}\acute{y})\cos\gamma\, d\varphi$$

którą można napisać w formie:

$$L(R') = \frac{F(\ddot{x}\ddot{y})}{2\pi}\int_{\Sigma_1}\cos\gamma\, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_1}\eta\cos\gamma\, d\varphi$$

Pierwsza całka jest zerem, druga z powodu nierówności 65 dąży wraz z liczbą R'

do zera, jest więc $\lim_{R'=0} \mathfrak{L}(R') = 0$. Nadto z powodu ciągłości funkcyi $F(xy)$ wewnątrz obszaru D i na krzywej C jest funkcya $\mathfrak{L}(R')$ funkcyą ciągłą względem promienia R' i względem środka koła koła Σ_1, do którego się odnosi; wskutek tego do każdej liczby dodatniej ε_1 istnieje liczba dodatnia l, taka, iż niezależnie od położenia środka P koła Σ_1 na krzywej C jest

$$(66) \qquad |\mathfrak{L}(R')| < \varepsilon_1$$

gdy tylko jest $0 < R' < l$. Nadto niezależnie od wielkości promienia R' jest

$$(67) \qquad |\mathfrak{L}(R')| < M$$

Oznaczmy przez K wyrażenie będące w nawiasie po stronie prawej równości 64 (str 168) i zauważmy, że jest:

$$\int_N F(x'y') \cos\gamma \frac{dK}{d\rho'} d\tau = 2\pi \int_0^l \mathfrak{L}(\rho')\rho' \frac{dK}{d\rho'} d\rho' + 2\pi \int_l^\infty \mathfrak{L}(\rho')\rho' \frac{dK}{d\rho'} d\rho'$$

a że jest

$$\left| \int \frac{dK}{d\rho'} \rho' d\rho' \right| < \left| \int K d\rho' - (K\rho') \right| < \int K d\rho'$$

jeżeli dolną granicą całkowania jest liczba zero, więc jest

$$(68) \quad |U_2| < \frac{\varepsilon_1}{2\pi^{3/2} t^{3/2}} \int_C ds \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} \int_0^\infty d\lambda' \int^l K d\rho' + \frac{M}{\pi^{3/2} t^{3/2}} \int_C ds \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} \int_0^\infty d\lambda' \left[(K\rho')_{\rho'=l} + \int_l^\infty K d\rho' \right]$$

ponieważ jest

$$\int_0^l K d\rho' < \int_0^\infty K d\rho'$$

więc na mocy rozumowań zupełnie analogicznych do tych, które są na str 164, 165 i 166 możemy powiedzieć, że istnieje dodatnia stała A taka, że niezależnie od położenia od położenia punktu (xy) w obszarze D jest pierwszy wyraz strony prawej nierówności 68 mniejszy od iloczynu

$$(69) \qquad A\varepsilon_1$$

przyczem stała A od liczby t niezależy. Drugi wyraz strony prawej ~~roz~~padnie się na dwie całki:

$$(70) \begin{cases} I_1 = \dfrac{M}{\pi^{3/2} t^{3/2}} \displaystyle\int_C ds \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} \int_0^\infty d\lambda' . \, l . \frac{\sqrt{\rho^2+\lambda^2} + \sqrt{l^2+\lambda'^2}}{\sqrt{l^2+\lambda'^2}} e^{-\frac{\left(\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{l^2+\lambda'^2}\right)^2}{4t}} \\ I_2 = \dfrac{M}{\pi^{3/2} t^{3/2}} \displaystyle\int_C ds \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} \int_0^\infty d\lambda' \int_l^\infty \frac{\sqrt{\rho^2+\lambda^2} + \sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}}{\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}} e^{-\frac{\left(\sqrt{\rho^2+\lambda^2}+\sqrt{\rho'^2+\lambda'^2}\right)^2}{4t}} d\rho' \end{cases}$$

i będzie:

$$I_1 < \frac{M e^{-\frac{l^2}{4t}}}{\pi^{3/2} t^{3/2}} \int_C e^{-\frac{\rho^2}{4t}} ds \left\{ \pi t + l\sqrt{\pi t} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda \right\}$$

ale przy każdej pozycyi punktu (xy) w obszarze D istnieje stała dodatnia d zależna jedynie od krzywej C taka, iż jest

$$\int_{(C)} e^{-\frac{l^2}{4t}} ds < d(t+\sqrt{t})$$

$$\int_C e^{-\frac{l^2}{4t}} ds \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda < d\sqrt{t}$$

a więc będzie:

(71) $$I_1 < \frac{M e^{-\frac{l^2}{4t}} d}{\pi^{3/2} t^{3/2}} \left\{ \pi t(t+\sqrt{t}) + l t\sqrt{\pi} \right\}$$

Podobnie będzie

$$I_2 < \frac{M}{\pi^{3/2} t^{3/2}} J(l) \left\{ \frac{\pi t}{l} \int_C ds\, e^{-\frac{l^2}{4t}} + \sqrt{\pi t} \int_C ds\, e^{-\frac{l^2}{4t}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\rho^2+\lambda^2}} d\lambda \right\}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$J(l) = \int_l^\infty e^{-\frac{l'^2}{4t}} d\varsigma'$$

Otóż jest

(72) $$\begin{cases} J(0) = \sqrt{\pi t} \\ J(l) = 2\sqrt{t} \int_{2l\sqrt{t}}^\infty e^{-x^2} dx \end{cases}$$

(73) $$I_2 < \frac{M d}{\pi^{3/2} t^{3/2}} J(l) \left\{ \frac{\pi t}{l}(t+\sqrt{t}) + t\sqrt{\pi} \right\}$$

Ale wolno nam przyjąć najpierw liczbę l, (jeżeli jest dość małą) i dość tego wyznaczyć liczbę ε_1, przez co liczba ε_1 stanie się funkcyą liczby l, zmierzającą do zera wraz z argumentem (tak mogę się bowiem zawsze urządzić); otóż obierzemy $l=\sqrt{t}$, wskutek równości 72 będzie stosunek $\frac{J(l)}{l}$ skończony, choćby liczba l do zera dążyła i funkcyę $J(l)$ można prosto uważać za wielkość względem zmiennej t rzędu $\sqrt{t}$; stąd wynika, że wielkości I_1 i I_2 zdążają do zera wraz z liczbą t i to niezależnie od położenia punktu (xy) w obszarze D; to samo da się więc więc powiedzieć o funkcyi U_2. Ostatecznie przekonaliśmy się, że różnica

$$V - F(xy)$$

dąży do zera jednostajnie w całym obszarze D wraz z liczbą t, a nie tylko w pewnej części obszaru D.

§ 71. We wypadku $h'=0$ jest funkcya $V(xyt)$ stale zerem wzdłuż krzywej C, jeżeli jest $t>0$ i przeto wzdłuż krzywej C jest

$$\lim_{t=0} V(xyt) = 0$$

gdyby więc funkcya $F(xy)$ była nawet ciągła wzdłuż krzywej C

i wewnątrz obszaru D, że funkcya $V(xyt)$ dla takiego punktu nie dążyłaby do wartości $F(xy)$, gdy zmienna t dąży do zera, a funkcya $F(xy)$ nie była zerem. Gdy jednakowoż będzie w bardzo szczególnym wypadku funkcya $F(xy)$ zerem wzdłuż krzywej C, stąd, zachowując własności zasadniczą jej ciągłości położymy zewnątrz krzywej C

$$F(xy) = 0$$

i wskutek całe rozumowanie poprzedniego paragrafu pozostanie prawdziwe i dla tego wypadku. Rezultat będzie więc następujący: ~~fu~~ różnica $V - F(xy)$ dążyć będzie do zera jednostajnie wraz z liczbą t w całym obszarze D.

VIII. Ogólne zagadnienie Fouriera.

§ 72. Jak wiadomo z pierwszego rozdziału, szukamy funkcyi $V(xyt)$, która obok innych warunków spełnia równanie

$$(1) \qquad \Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}$$

wewnątrz obszaru D, a równanie

$$(2) \qquad h'\left(\frac{dV}{dN}\right)_i = h(V)_i + \varphi$$

wzdłuż krzywej C, przyczem funkcya φ jest ciągłą względem zmiennych (xyt).

Połóżmy

$$(3) \qquad V = u + v$$

gdzie u niech oznacza funkcyę spełniającą równanie:

$$(4) \qquad \Delta u + \xi u = 0$$

wewnątrz obszaru D i warunek:

$$(5) \qquad h'\left(\frac{du}{dN}\right)_i = h(u)_i + \varphi$$

wzdłuż krzywej C.

Jeżeli parametr ξ obierzemy tak, żeby spełniał nierówności 18 (str. 40) i 49 (str. 46), to taka funkcya u istnieje napewno i będzie można ją obrać jako potencyał warstwy pojedynczej, względnie podwójnej.

Ażeby funkcya V spełniała równanie 1, przekonajmy się, czy obie funkcye u, v mają pochodną względem zmiennej t. Jak zaraz zobaczymy, dość założyć, że funkcya φ ma pochodną pierwszą ciągłą

względem zmiennej t wzdłuż krzywej C i dla każdej niezjemnej wartości na zmienną t, co obecnie założymy.

Zajmijmy się najpierw wypadkiem $h'=0$; wtedy funkcyę u można obrać jako potencyał warstwy podwójnej tak, iż wzdłuż krzywej C jest

$$(6) \qquad u_i = \tau$$

gdzie jest

$$(7) \qquad \tau = -\frac{\varphi}{h}$$

przyczem funkcya h zależy jedynie od punktu krzywej C, względem niego jest ciągła i nigdzie wzdłuż krzywej C nie staje się zerem; funkcja τ ma więc ~~ma się~~ pochodną ciągłą względem zmiennej t, przyczem moduł $\left|\frac{\partial\tau}{\partial t}\right|$ ma górną granicę, którą oznaczymy przez T_1, o ile się ograniczymy do interwału $0<t_1\le t\le t_2$, gdzie liczby t_1, t_2 zostały dowolnie wybrane.

Stosownie do rozumowań § 21 (str 41) kładziemy:

$$u = \sum_0^\infty u_k$$

gdzie jest

$$u_0 = \frac{-1}{2\pi}\int_C \tau \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta ds \quad ; \quad u_k = \frac{1}{2\pi}\int_C u_{k-1,e} \frac{df(\varrho\mu)}{d\varrho}\cos\vartheta ds, \; (k=1,2 ..)$$

przyczem ϑ jest kątem zawartym między normalną wewnętrzną do krzywej C, narysowaną w miejscu elementu ds a odcinkiem ϱ łączącym punkt xy z dowolnym punktem $x'y'$ krzywej C a skierowanym od punktu $x'y'$ do punktu xy. Stąd wynika (druga z równości 23 na str 20), że jest

$$(u_0)_e = -\frac{\tau}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_C \tau \frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos\vartheta ds$$

gdzie ϱ' oznacza wielkość, w którą przechodzi odległość ϱ, gdy punkt (xy) leży na krzywej C. Ponieważ, jak się łatwo można przekonać, całka strony prawej ma pochodną względem zmiennej t i równa się ta pochodna całce $\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{df(\varrho'\mu)}{d\varrho'}\cos\vartheta ds$, więc jest

$$\frac{\partial (u_0)_e}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial t} - \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{df(\varrho'\nu)}{d\varrho'}\cos\vartheta ds$$

Na mocy nierówności 38 (str 33) i 18 (str 40) otrzymujemy:

$$\left|\frac{\partial u_{0e}}{\partial t}\right| < \frac{T_1}{2} + \frac{c\,T_1}{2T_1 \sin^2\frac{\theta}{2}} \le \frac{3T_1}{4}$$

i podobnie będzie

$$\left|\frac{\partial u_{ke}}{\partial t}\right| < \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \cdot T_1$$

a stąd jest na mocy nierówności 40 (str 33):

$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial t}\right| < A\,T_1 \quad ; \quad \left|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right| < A.\left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot T_1$$

gdzie oznaczyliśmy

$$A = \frac{c}{\sin\frac{\varrho}{2}} + \frac{c}{2\sqrt{\rho_1}\sin^2\frac{\varrho}{2}}$$

Wobec tego także szereg

$$(8) \qquad \sum_0^\infty \frac{\partial u_k}{\partial t}$$

będzie jednostajnie zbieżny wewnątrz obszaru D i gdy jest $0 < t_1 < t \leq t_2$ i szereg (8) przedstawia więc pochodną $\frac{\partial u}{\partial t}$. To samo można wykazać i we wypadku $h' = 1$.

Skoro istnienie pochodnej $\frac{\partial u}{\partial t}$ wykazaliśmy otrzymamy na funkcyę v warunki następujące:

wewnątrz obszaru D ma być $\quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \xi u\right)$

wzdłuż krzywej C ma być $\quad h'\left(\frac{dv}{dN}\right)_i = h(v)_i$.

§ 73. Wobec tego zajmiemy się zagadnieniem następującem. Starajmy się utworzyć funkcyę W, 1) któraby dla każdej dodatniej wartości na zmienną t była ciągła w całym obszarze D i wewnątrz niego spełniała równanie

$$(9) \qquad \Delta W = \frac{\partial W}{\partial t} + A(xyt)$$

przyczem $A(xyt)$ przedstawia daną funkcyę. 2) Dla każdej dodatniej wartości na zmienną t ma być spełniony wzdłuż krzywej C warunek

$$(10) \qquad h'\left(\frac{dW}{dN}\right)_i = h(W)_i$$

3) Kiedy zmienna t dąży do zera, to funkcya W zdąża jednostajnie do funkcyi ciągłej zmiennych (xy) w całym obszarze, zresztą dowolnie obranej.

Załóżmy, że rozwiązaliśmy powyższe zagadnienie, przyczem warunek 3^{ci} daje nam wielką swobodę, i nasto kładziemy:

$$A(xyt) = \frac{\partial u}{\partial t} + \xi u$$

to różnica $v - W$ będzie rozwiązaniem W_1 odpowiednio sformułowanego uproszczonego zagadnienia Fouriera, a więc będzie

$$v = W + W_1$$

Utworzymy najpierw funkcyę W przy pewnem bardzo szczególnem założeniu co do funkcyi $A(xyt)$ i następnie zobaczymy, czy funkcya, do której utworzenia zostaniemy doprowadzeni, jest rozwiązaniem dopieroco wystawionego zagadnienia i w tym wypadku, gdy tych bardzo szczególnych założeń o funkcyi $A(xyt)$ nie zrobimy.

Załóżmy więc, że funkcya $A(xyt)$ da się rozwinąć w szereg funkcyi harmonicznych, jednostajnie zbieżny w całym obszarze D t. j. niech

jest:

(11) $$A(xyt) = \sum_1^\infty C_k(t) \cdot U_k(xy)$$

gdzie jest

(12) $$C_k(t) = \int_{(D)} A(x'y't)\, U_k(x'y')\, d\tau$$

Załóżmy dalej, że jest:

(13) $$W = \sum_1^\infty W_k$$

gdzie funkcye W_k wewnątrz obszaru D spełniają równanie:

(14) $$\Delta W_k = \frac{\partial W_k}{\partial t} + C_k(t)\, U_k$$

na krzywej C równanie

(15) $$h'\left(\frac{dW_k}{dN}\right)_i = h(W_k)_i$$

Połóżmy dalej

(16) $$W_k = f_k(t) \cdot U_k(xy)$$

to na funkcye $f_k(t)$ otrzymamy równanie:

$$\frac{df_k(t)}{dt} + \xi_k f_k(t) + C_k(t) = 0$$

a stąd odrzucając stałą dowolną, otrzymujemy:

(17) $$f_k(t) = -\int_0^t C_k(\eta)\, e^{\xi_k(\eta - t)}\, d\eta$$

przeto mielibyśmy:

(18) $$W = -\sum_1^\infty \int_0^t U_k(xy)\, e^{\xi_k(\eta-t)}\, d\eta \int_D A(x'y'\eta)\, U_k(x'y')\, d\tau$$

Chodzi nam teraz o to, by szeregowi temu nadać taką postać, iżby w każdym razie przy wartości nieujemnej na zmienną t był zbieżnym. Ponieważ szereg $\sum_1^\infty C_k(t)\, U_k(xy)$, ogólnie mówiąc, mógłby być rozbieżnym, a już szereg $\sum_1^\infty \frac{C_k(t)U_k(xy)}{\xi_k}$ jest jednostajnie zbieżny w obszarze D, o ile tylko całka

$$\int_{(D)} A^2(xyt)\, d\tau$$

ma sens, bo jest

$$\left(\sum_n^\infty \frac{C_k(t)U_k(xy)}{\xi_k}\right)^2 \leq \sum_n^\infty C_k^2(t) \sum_n^\infty \frac{U_k^2(xy)}{\xi_k^2}$$

gdzie n oznacza dość wielką całkowitą liczbę, wykonamy więc częściowe całkowania tak długo, aż otrzymamy szeregi w każdym razie jednostajnie zbieżne w obszarze D, które będzie można różniczkować co do zmiennej t.

Niech ξ_0 jest liczbą dodatnią i dość wielką taką, iż dla liczby $(-\xi_0)$ istnieje funkcya Greena $G(xy, x'y', -\xi_0)$; kładąc

$$e^{\xi_k(\eta-t)} = e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)} \cdot e^{-\xi_0(\eta-t)}$$

otrzymujemy przy założeniu, że funkcya $A(xyt)$ ma ciągłą pochodną $\frac{\partial A}{\partial t}$ dla nieujemnych wartości na zmienną t i w całym obszarze D:

$$\int_0^t e^{\xi_k(\eta-t)} A(x'y',\eta)\,d\eta = \left(\frac{e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)}}{\xi_k+\xi_0} A(x'y'\eta)\, e^{-\xi_0(\eta-t)} \right)_0^t -$$

$$- \int_0^t \frac{e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)}}{\xi_k+\xi_0} \cdot \frac{\partial\left[A(x'y'\eta)\, e^{-\xi_0(\eta-t)}\right]}{\partial\eta}\, d\eta =$$

$$= \frac{A(x'y't)}{\xi_k+\xi_0} - \frac{e^{-\xi_k t} A(x'y'0)}{\xi_k+\xi_0} - \int_0^t \frac{e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)}}{\xi_k+\xi_0} \cdot \frac{\partial\left[A(x'y'\eta)\, e^{-\xi_0(\eta-t)}\right]}{\partial\eta}\, d\eta$$

Przeto jest

$$W(xyt) = -\sum_1^\infty \frac{U_k(xy)}{\xi_k+\xi_0} \int_{\mathfrak{D}} A(x'y't)\, U_k(x'y')\, d\tau + \sum_1^\infty \frac{e^{-\xi_k t}}{\xi_k+\xi_0} U_k(xy) \int_{\mathfrak{D}} A(x'y'0)\, U_k(x'y')\, d\tau +$$

$$+ \sum_1^\infty U_k(xy) \int_{\mathfrak{D}}\int_0^t \frac{e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)}}{\xi_k+\xi_0} \frac{\partial\left[A(x'y'\eta)\, e^{-\xi_0(\eta-t)}\right]}{\partial\eta} U_k(x'y')\, d\tau\, d\eta$$

Drugi szereg strony prawej odrzucimy, nato bowiem wpływa na funkcyę, określoną w trzecim warunku obecnego zagadnienia (str. 174), a szeregi pozostałe będą i nadal zbieżne; ponieważ chodzi nam o pochodną $\frac{\partial W}{\partial t}$, więc w ostatnim szeregu musimy jeszcze raz wykonać częściowe całkowanie; zakładamy więc w tym celu, że funkcya $A(xyt)$ ma nadto drugą ciągłą pochodną $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ dla nieujemnych wartości zmiennej t i w całym obszarze $\mathfrak{D}$. Odrzucając znowu wyrazy, które przy całkowaniu częściowem dla $t=0$ wypadną, otrzymamy:

(19)
$$W(xyt) = -\sum_1^\infty \frac{U_k(xy)}{\xi_k+\xi_0} \int_{(\mathfrak{D})} A(x'y't)\, U_k(x'y')\, d\tau + \sum_1^\infty \frac{U_k(xy)}{(\xi_k+\xi_0)^2} \int_{(\mathfrak{D})} \left\{ \frac{\partial A(x'y't)}{\partial t} - \xi_0 A(x'y't) \right\} U_k(x'y')\, d\tau -$$

$$- \sum_1^\infty U_k(xy) \int_{\mathfrak{D}}\int_0^t \frac{e^{(\xi_k+\xi_0)(\eta-t)}}{(\xi_k+\xi_0)^2} \cdot \frac{\partial^2\left[A(x'y'\eta)\, e^{-\xi_0(\eta-t)}\right]}{\partial\eta^2} \cdot U_k(x'y')\, d\tau\, d\eta$$

Szereg pierwszy strony prawej:

(20)
$$\phi_1(xyt) = \sum_1^\infty \frac{U_k(xy)}{\xi_k+\xi_0} \int_{(\mathfrak{D})} A(x'y't)\, U_k(x'y')\, d\tau$$

definiuje funkcyę, którą oznaczyliśmy przez $\phi_1(xyt)$ i którą, jak widać z porównania z równościami 44 (str. 131) i 46 (str. 132), można przedstawić całką:

(20bis)
$$\phi_1(xyt) = \int_{(\mathfrak{D})} A(x'y't)\, G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau$$

Szereg drugi wolno rozdzielić na dwa szeregi:

(21)
$$\left\{ \begin{aligned} \phi_2 &= \sum_1^\infty \frac{U_k(xy)}{(\xi_k+\xi_0)^2} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial A(x'y't)}{\partial t} U_k(x'y')\, d\tau \\ \phi_3 &= \xi_0 \sum_1^\infty \frac{U_k(xy)}{(\xi_k+\xi_0)^2} \int_{\mathfrak{D}} A(x'y't)\, U_k(x'y')\, d\tau \end{aligned} \right.$$

Funkcya Φ_2, jak się łatwo można przekonać, spełnia wewnątrz obszaru D równanie:

$$\Delta\Phi_2 - \xi_0\Phi_2 + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

zaś na krzywej C jest:

$$k'\left(\frac{d\Phi_2}{dN}\right)_i = h(\Phi_2)_i \quad (23)$$

przeto jest

$$\Phi_2 = \int_D \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} G(xy, x'y', -\xi_0)d\tau \quad (24)$$

i podobnie

$$\Phi_3 = \xi_0 \int_{(D)} \Phi_1 G(xy, x'y', -\xi_0)d\tau \quad (25)$$

Ostatni szereg strony prawej równości 19 napiszemy pod postacią:

$$\int_0^t d\eta \left(\sum_1^\infty U_k(xy) \frac{e^{\xi_k(\eta-t)}}{(\xi_k+\xi_0)^2} \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial^2 A(x'y'\eta)}{\partial\eta^2} - 2\xi_0 \frac{\partial A(x'y'\eta)}{\partial\eta} + \xi_0^2 A(x'y'\eta) \right\} d\tau \right) \quad (26)$$

Połóżmy wobec tego

$$\Phi_4 = \sum_1^\infty A_k U_k e^{-\xi_k\lambda} \quad (27)$$

gdzie liczba λ nie jest dodatnią; nadto niech będzie:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} A_k &= \int_{(D)} F(x'y'\eta) U_k(x'y') d\tau \\ F(x'y'\eta) &= \frac{\partial^2 A(x'y'\eta)}{\partial\eta^2} - 2\xi_0 \frac{\partial A(x'y'\eta)}{\partial\eta} + \xi_0^2 A(x'y'\eta) \end{aligned} \right.$$

wobec tego funkcya Φ_4 zależy od zmiennych (xy, η, λ); funkcyę tę wystudyowaliśmy w rozdziale poprzedzającym. Stąd utwórzmy całkę:

$$\Phi_5(xy, \eta, \lambda) = \int_{(D)} \Phi_4(x'y', \eta, \lambda) G(xy, x'y', -\xi_0)d\tau \quad (29)$$

z powodu tego całkowania musimy dorzucić pewną uwagę; co znaczy $\Phi_4(xy, \eta, 0)$, to trzeba wyjaśnić; umówimy się, że jest

$$\Phi_4(xy, \eta, 0) = F(xy\eta) \quad (30)$$

Z rozdziału poprzedzającego nam, wiadomo, że, o ile punkt (xy) leży wewnątrz obszaru, to jest

$$\lim_{\lambda=0} \Phi_4(xy, \eta, \lambda) = F(xy, \eta)$$

z powodu równości 30 czynimy funkcyę $\Phi_4(xy, \eta, \lambda)$ ciągłą, gdy punkt (xy) leży wewnątrz obszaru D i liczba η nie ma wartości nieujemnej. Jeżeli punkt (xy) leży na krzywej C, to jest we wypadku $h'=0$

$$\lim_{\lambda=0} \Phi_4(xy, \eta, \lambda) = 0$$

jeżeli więc funkcya $F(xy\eta)$ nie jest zerem na krzywej C, to funkcya $\Phi_4(xy, \eta, \lambda)$ wtedy nie będzie ciągła względem zmiennej λ.
Całka $\Phi_5(xy, \eta, \lambda)$ jest więc określona i we wypadku $\lambda=0$.
Ponieważ jest (równość 20 na str 124):

$$\int_{(D)} U_k(x'y')\, G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau = \frac{U_k(xy)}{\xi_k + \xi_0}$$

więc będzie z jednostajnej zbieżności szeregu (27) widoczne, że jest:

(31) $$\Phi_5(xy, \eta, \lambda) = \sum_1^{\infty} \frac{A_k U_k(xy)}{\xi_k + \xi_0} e^{-\xi_k \lambda}$$

Kładąc

$$\Phi_6(xy, \eta, \lambda) = \int_{(D)} \Phi_5(x'y', \eta, \lambda)\, G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau$$

otrzymujemy

(32) $$\Phi_6(xy, \eta, \lambda) = \sum_1^{\infty} \frac{A_k U_k(xy)}{(\xi_k + \xi_0)^2} . e^{-\xi_k \lambda}$$

Wobec tego szereg 26 b (str. 177) będzie równy całce

(33) $$\int_0^t \Phi_6(xy, \eta, t-\eta)\, d\eta$$

w której wolno, jak łatwo stwierdzić zmienić porządek całkowania, więc jest.

(33 bis) $$\int_{(D)} G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau \int_0^t \Phi_5(x'y', \eta, t-\eta)\, d\eta$$

Na mocy równości 19, 20 bis (str. 176), 24, 25 (str. 177) i wyrażenia 33 bis możemy położyć

(34) $$W(xyt) = \int_{(D)} K(x'y't) . G(xy, x'y', -\xi_0)\, d\tau$$

gdzie jest

(35) $$K(xyt) = -A(xyt) + \frac{\partial \Phi_1(xyt)}{\partial t} - \xi_0 \Phi_1(xyt) - \int_0^t \Phi_5(xy, \eta, t-\eta)\, d\eta$$

Teraz a posteriori wykażemy, że funkcya $W(xyt)$, określona równościami 34 i 35 spełnia warunki obecnego zadania.

Załóżmy, że pierwsze pochodne $\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}$ wewnątrz obszaru D istnieją i że są ciągłe dla każdej nieujemnej wartości na zmienną t; zważmy, że funkcya $\Phi_4(xy, \eta, \lambda)$ [równość 27 str. 177] jest, jako rozwiązanie pewnego uproszczonego zagadnienia Fouriera, ograniczoną w całym obszarze D (§ 68 str. 162, § 69 str. 168), bo funkcya $F(x'y', \eta)$ jest ograniczona; istnieją więc przy nieujemnej wartości na zmienną t pochodne pierwsze funkcyi Φ_1 i Φ_5, a więc na mocy równości 35 istnieją wewnątrz obszaru D pochodne $\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial y}$, nadto funkcya $K(xyt)$ będzie ciągłą funkcyą zmiennych (x, y, t) w całym obszarze D i dla nieujemnych wartości na zmienną t; stąd na mocy równości 34 (str. 178) wynika, że funkcya $W(xyt)$ jest ciągłą w całym obszarze D i dla nieujemnych wartości na zmienną t i ma wewnątrz obszaru D ~~pro~~ pochodne drugie takie, że jest

(36) $$\Delta W(xyt) - \xi_0 W(xyt) + K(xyt) = 0$$

a na krzywej C spełnia równanie

$$h'\left(\frac{dW}{dN}\right)_i = h\,(W)_i$$

Na mocy naszych oznaczeń jest

(37) $W(xyt) = -\phi_1(xyt) + \frac{\partial \phi_2(xyt)}{\partial t} - \xi_0 \phi_2(xyt) - \int_0^t \phi_6(xy,\eta,t-\eta)\,d\eta$

Zauważmy, że wskutek naszych dotychczasowych założeń o funkcyi $A(xyt)$ funkcye ϕ_1, ϕ_2, $\frac{\partial \phi_2}{\partial t}$ mają pochodne względem zmiennej t; wystarczy więc zbadać ostatni wyraz równości 37, chcąc się przekonać o tem, czy funkcya $W(xyt)$ ma pochodną $\frac{\partial W}{\partial t}$. Ponieważ, jak wiadomo z analizy, jest:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t C(xy,\eta,t)\,d\eta\right) = \int_0^t \frac{\partial C(xy,\eta,t)}{\partial t}\,d\eta + C(xy,t,t)$$

przy następujących wystarczających warunkach: przy ważnej wartości (xyt) ma być funkcya $C(xy,\eta,t)$, jak i jej pochodna $\frac{\partial C}{\partial t}$ funkcyą ciągłą względem zmiennej η w interwale $(0,t)$, więc utworzony wyrażenie:

$$\frac{\partial \phi_6(xy,\eta,\lambda)}{\partial \lambda} = -\sum_1^\infty \xi_k \cdot \frac{A_k U_k(xy)}{(\xi_k+\xi_0)^2} \cdot e^{-\xi_k \lambda}$$

i jak widać, jest szeregiem jednostajnie zbieżnym w całym obszarze Ω, a liczba λ nie ma być ujemną; nadto to samo dotyczy funkcyi $\phi_6(xy,\eta,\lambda)$; będzie więc

(38) $\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t \phi_6(xy,\eta,t-\eta)\,d\eta\right) = \int_0^t \frac{\partial \phi_6(xy,\eta,t-\eta)}{\partial t}\,d\eta + \phi_6(xy,t,0)$

ale jest

$$\phi_6(xyt0) = \int_{(\Omega)} \phi_5(x'y',t,0)\,G(xy,x'y',-\xi_0)\,d\tau$$

$$\phi_5(xyt0) = \int_{(\Omega)} \phi_4(x'y',t,0)\,G(xy,x'y',-\xi_0)\,d\tau$$

$$\phi_4(x,y,t,0) = \frac{\partial^2 A(xyt)}{\partial t^2} - 2\xi_0 \frac{\partial A(xyt)}{\partial t} + \xi_0^2 A(xyt)$$

wobec tego jest

(39) $\phi_6(xyt) = \frac{\partial^2 \phi_2(xyt)}{\partial t^2} - 2\xi_0 \frac{\partial \phi_2(xyt)}{\partial t} + \xi_0^2 \phi_2(xyt)$

przeto jest na mocy równości 37, 38 i 39:

$$\frac{\partial W(xyt)}{\partial t} = \xi_0 W(xyt) + \xi_0 \phi_1(xyt) - \frac{\partial \phi_1(xyt)}{\partial t} - \int_0^t \left[\frac{\partial \phi_6(xy,\eta,t-\eta)}{\partial t} - \xi_0 \phi_6(xy,\eta,t-\eta)\right] d\eta$$

a że jest

$$\frac{\partial \phi_6}{\partial t} - \xi_0 \phi_6 = -\sum_1^\infty \frac{A_k U_k(xy)}{\xi_k+\xi_0} e^{-\xi_k(t-\eta)} = -\phi_5(xy,\eta,t-\eta)$$

więc jest

$$\frac{\partial W(xyt)}{\partial t} = \xi_0 W(xyt) + \xi_0 \phi_1(xyt) - \frac{\partial \phi_1(xyt)}{\partial t} + \int_0^t \phi_5(xy,\eta,t-\eta)\,d\eta$$

a stąd i z równości 35 (str 178) jest

$$\frac{\partial W(xyt)}{\partial t} + K(xyt) = -A(xyt) + \xi_0 W(xyt)$$

a więc będzie na mocy równości 36 (str 178):

$$(37) \qquad \Delta W(xyt) = \frac{\partial W(xyt)}{\partial t} + A(xyt)$$

wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$.
Z powodu ciągłości funkcyi $W(xyt)$ warunek treści obecnego zagadnienia jest łatwy do spełnienia (str. 174).

§ 74. Ażeby tę analizę módz stosować do naszego wypadku, którym zajmowaliśmy się w § 72 (str 172 i nast.), połóżmy:

$$(38) \qquad A(xyt) = \frac{\partial u}{\partial t} + \xi u$$

W ciągu rozumowania paragrafu poprzedzającego musieliśmy na funkcyę $A(xyt)$ następujące warunki nałożyć:

a) funkcya $A(xyt)$, jak i jej pochodne $\frac{\partial A}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ muszą być ciągłe względem zmiennych (xyt) w całym obszarze $\mathfrak{D}$ przy każdej nieujemnej wartości na zmienną t;

b) funkcya $A(xyt)$ ma mieć ciągłe pochodne $\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial A}{\partial y}$ wewnątrz obszaru $\mathfrak{D}$ przy każdej nieujemnej wartości na zmienną t.

Podobnie, jak w § 72 (str 172) można się przekonać, iż dla spełnienia warunku a) wystarczy założyć na mocy równości 38, że funkcya $\varphi(xyt)$ z § 72 i jej pochodne $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3}$ są ciągłe względem nieujemnej zmiennej t i punktu krzywej C — (w § 72 już wypowiedzieliśmy ten warunek o pochodnej $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ i funkcyi φ). Warunek ~~b~~ b) będzie napewne już spełniony, bo funkcya u jest potencyałem warstwy pojedynczej lub podwójnej, rozpostartej wzdłuż krzywej C.
W ten sposób rozwiązaliśmy również ogólne zagadnienie Fouriera.

W Krakowie dnia 2 marca 1908 r.

Spis rzeczy.

Literatura pomocnicza:

St. Zaremba: Ogólne rozwiązanie zagadnienia Fouriera 1905.

St. Zaremba: O równaniu o pochodnych cząstkowych $\Delta u + \xi u + f = 0$ i o funkcyach harmonicznych. 1900

St. Zaremba: O t. zw. funkcyach zasadniczych z teoryi równań fizyki matematycznej. 1901.

S. Zaremba: Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes. 1904.

<u>Do str 72 na dole</u>. Niech jest $\xi = -m^2$, gdzie m jest liczbą rzeczywistą, dość wielką. Punkt P_0
uważajmy za środek dwu kół Σ, Σ' dość małych, przyczem koło Σ niech ma promień większy.
Połóżmy $\varphi = v + w$, gdzie v niech oznacza potencyał podwójnej warstwy rozpostartej wzdłuż
koła Σ tak, iż na kole Σ jest $v = \varphi$ i nadto wewnątrz koła Σ jest $\Delta v - m^2 v = 0$; wsku-
tek tego w jest funkcyą ciągłą w punkcie P_0, spełniającą równanie $\Delta w - m^2 w = 0$ wszędzie
może za wyjątkiem punktu P_0; nadto wzdłuż koła Σ jest $w = 0$; w pierścieniu, ogra-
niczonym przez koła Σ, Σ' funkcya $|w|$, jak wiemy, nie może mieć swego maximum,
może to tylko zachodzić na kole Σ', a że jego promień można uczynić dowolnie
małym, więc maximum funkcya $|w|$ posiadać może tylko w punkcie P_0; ozna-
czmy to maximum przez M. Jeżeli połóżymy $w = w_1 + iw_2$, przyczem funkcye
w_1, w_2 są rzeczywiste, to z nierówności $|w| < M$, która ma miejsce dla
wszystkich punktów obszaru ograniczonego przez koło Σ poza punktem P_0, wy-
nika też, że jest $|w_1| < M$, $|w_2| < M$. Obierzmy dowolny punkt P wewnątrz koła
Σ i niech $\overline{P_0P} = \rho$, zaś δ niech oznacza promień koła Σ'. Uważajmy funkcye:
$F_1 = M f(\rho, m) - w_1 f(\delta, m)$; $F_2 = M f(\rho, m) + w_1 f(\delta, m)$, $F_3 = M f(\rho, m) - w_2 f(\delta, m)$
$F_4 = M f(\rho, m) + w_2 f(\delta, m)$; funkcye te w pierścieniu spełniają równania $\Delta F_1 - m^2 F_1 = 0$,
$\Delta F_2 - m^2 F_2 = 0$, $\Delta F_3 - m^2 F_3 = 0$, $\Delta F_4 - m^2 F_4 = 0$, nadto wszystkie cztery są dodatnie na
kołach Σ i Σ', więc dla żadnego punktu P nie mogą być ujemne, a więc jest
$|w_1| < M . \frac{f(\rho, m)}{f(\delta, m)}$; $|w_2| < M . \frac{f(\rho, m)}{f(\delta, m)}$, co ma miejsce dla dowolnie małej wartości
na liczbę δ, byle była ta wartość dodatnią; ale prawe strony tych nie-
równości można uczynić dowolnie małemi wraz z liczbą δ, kiedy lewe strony
mają wartości stałe i określone, od liczby δ niezależne, jest więc $w_1 = w_2 = 0$
w miejscu P czyli w całym kole Σ jest $w \equiv 0$, a stąd $\varphi \equiv v$, gdzie funkcya v
jak i φ spełnia równanie $\Delta\varphi - m^2\varphi = 0$ także w punkcie P_0. —

